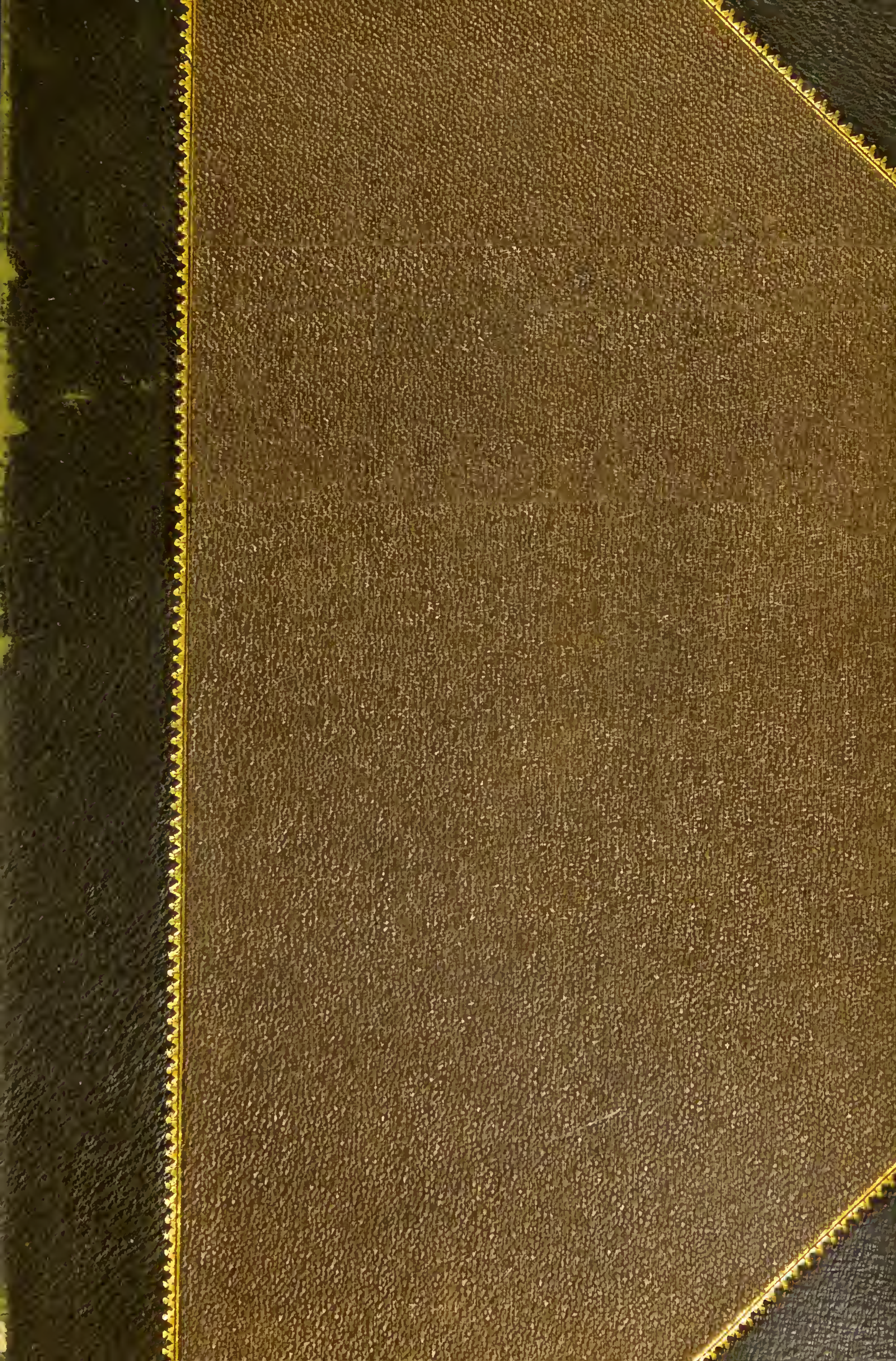
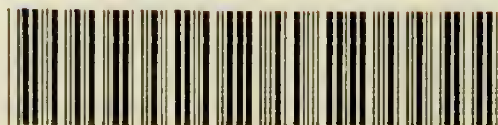
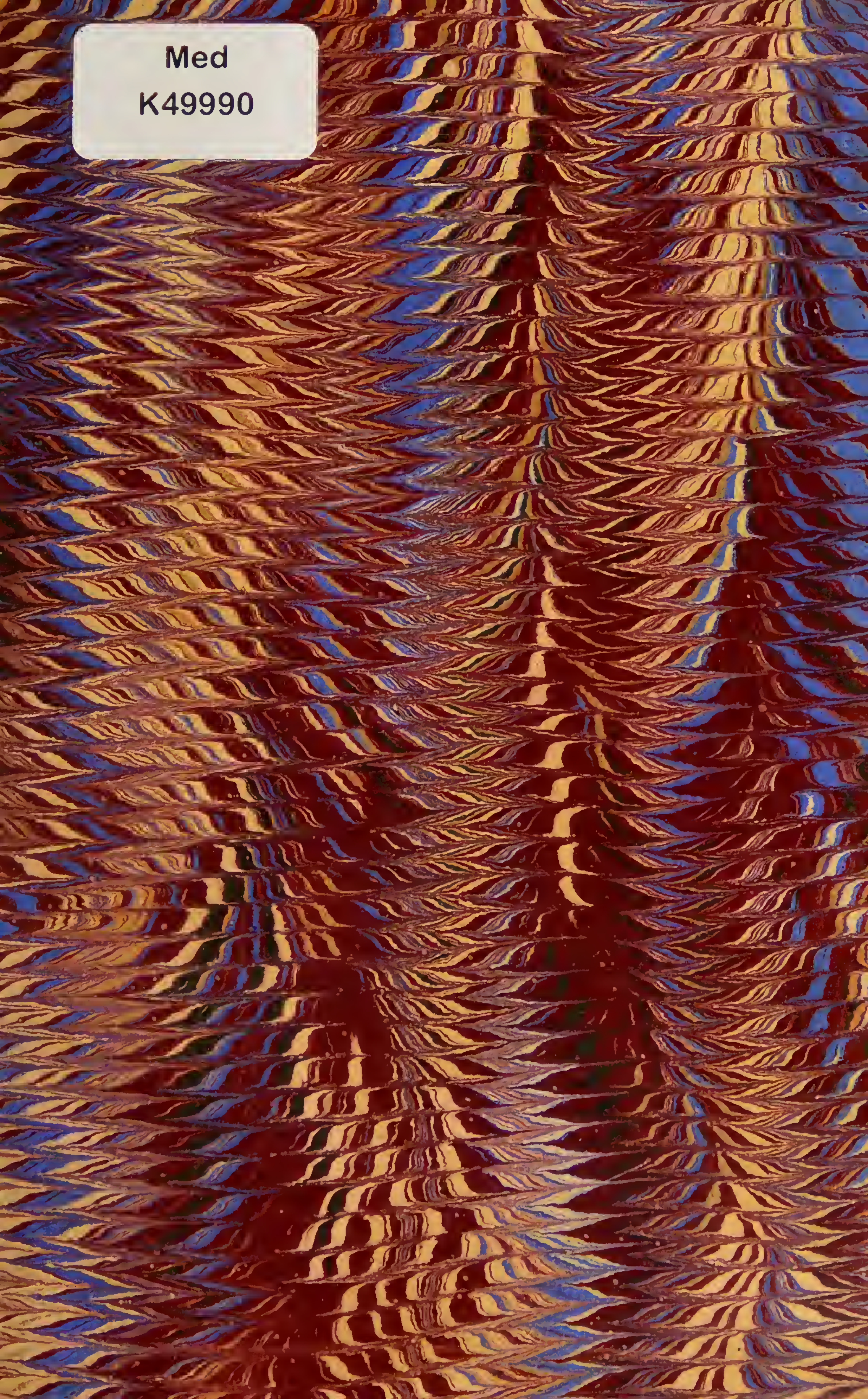



22102350317


Med
K49990

DIE FUNDAMENTAL-EIGENSCHAFTEN

DER

DIOPTRISCHEN INSTRUMENTE.

DIE FUNDAMENTAL-EIGENSCHAFTEN DER DIOPTRISCHEN INSTRUMENTE.

ELEMENTARE DARSTELLUNG DER GAUSS'SCHEN THEORIE UND IHRER ANWENDUNGEN.

VON

DR. GALILEO FERRARIS,

PROFESSOR AM K. ITALIENISCHEN GEWERBEMUSEUM IN TURIN.

AUTORISIRTE DEUTSCHE AUSGABE.

ÜBERSETZT UND MIT EINEM ANHANGE VERSEHEN

VON

F. LIPPICH,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT PRAG.

MIT 74 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG

VERLAG VON QUANDT & HÄNDEL.

1879.

6628

11842769

Vorrede des Verfassers.

Unter dem Titel „dioptrische Untersuchungen“ legte Gauss der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 10. December 1840 eine Abhandlung vor über den Gang jener Lichtstrahlen in einem Systeme brechender Medien, welche man die centralen nennt[1]); diese Abhandluug bezeichnete den grössten Fortschritt, welchen dieser fundamentale Theil der Theorie dioptrischer Instrumente in unserem Jahrhundert gemacht hat.

Die vorhergegangenen Untersuchungen über den Gang der Centralstrahlen durch Linsen, zerfielen nach der vollständig verschiedenen Natur ihrer Resultate in zwei Gruppen: in der einen vernachlässigte man die Linsendicken, in der anderen wurden sie berücksichtigt. Im ersten Falle führten die Arbeiten von Cotes, Euler, Lagrange, Piola, Möbius zu Resultaten, welche sowohl durch die Eleganz der sehr einfachen Formeln, als auch durch die Leichtigkeit der graphischen Constructionen, von welchen die Lösungen aller Probleme abhingen, Nichts zu wünschen übrig liessen; im andern Falle wurde das Problem allerdings gelöst, aber die bekannte Theorie führte zu complizirten Formeln und, was noch mehr ins Gewicht fällt, zu Formeln, die nicht in leicht zu überblickende und anzuwendende geometrische Sätze gefasst werden konnten. Es war natürlich, dass von den beiden Wegen, demjenigen mit seinen exacten aber verwickelten Formeln, in denen die Linsendicken vorkommen und dem anderen, der sich nur mit aproximativen Resultaten begnügt, die aber durch einfache und elegante Formeln und Construc-

1) Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. I. 1843; Carl Friedrich Gauss Werke, Bd. V. Göttingen 1867, S. 243.

tionen sich darstellen, der zweite viel häufiger befolgt wurde, namentlich von den Autoren von Lehrbüchern der allgemeinen Physik und der Geodäsie. Die Annahme, dass die Linsendicken vernachlässigt werden können, wurde so gebräuchlich, dass sie sogar als selbstverständlich galt, auch wenn sie nicht zulässig war. Die bedeutende Verschiedenheit an Bequemlichkeit und geometrischer Klarheit, welche die beiden Theile der Theorie darboten, eine Verschiedenheit die den Vorgang der Autoren, wenn auch nicht immer rechtfertigt, so doch wenigstens erklärt, wurde gehoben durch die Arbeit von Gauss.

Dieser grosse deutsche Mathematiker, indem er das dioptrische System bestehend annahm aus irgend einer Anzahl durchsichtiger Medien, von einander getrennt durch Theile von Kugelflächen, die ihre Mittelpunkte auf einer und derselben Geraden haben, also das Problem allgemeiner fasste, bewies, dass auf dieser Geraden, der Axe des Systemes, im Allgemeinen vier Punkte existiren, vermittelst welcher der austretende Strahl, der einem gegebenen einfallenden entspricht, oder der zu einem gegebenen Punkte conjugirte, durch sehr einfache Constructionen oder Formeln, identisch mit jenen sich bestimmen lässt, die bereits für die einfachen Fälle einer einzigen brechenden Fläche oder einer unendlich dünnen Linse in Gebrauch waren. Von den vier Punkten waren zwei unter dem Namen der Brennpunkte schon bekannt, die anderen zwei erhielten von Gauss den Namen Hauptpunkte[1]).

In den vorhergegangenen Arbeiten hatte man immer Instrumente aus Linsen zusammengesetzt betrachtet, bei denen das Licht durch Luft einfiel und wieder in Luft austrat. Die Arbeit von

---

1) Die Hauptebenen, oder die zur Axe senkrecht durch die Hauptpunkte geführten Ebenen, bemerkte schon Möbius in seiner Schrift: Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systemes von Linsengläsern, Crelle Journal, Bd. V, 1830. Hier sind die hauptsächlichsten Eigenschaften dieser Ebenen angegeben, vielleicht mehr explicite als bei Gauss; aber es wurde nicht ihr Nutzen erkannt für die Bestimmung der gebrochenen Strahlen, dem sie vornehmlich ihre Wichtigkeit verdanken. Ueberdiess muss bemerkt werden, dass der von Möbius behandelte Fall viel weniger allgemein ist als der von Gauss untersuchte: es ist der eines Systemes unendlich dünner Linsen, die überall von Luft umgeben sind.

Gauss beseitigte auch diese Beschränkung: in dem sehr allgemeinen dioptrischen Systeme, mit welchem sich diese Abhandlung beschäftiget, sind das erste Mittel, durch welches das Licht ankommt, und das letzte, in welches dasselbe austritt, nachdem es die letzte Trennungsfläche verlassen hat, irgend welche Medien, die verschiedene Brechungsindices besitzen können. Die neue Theorie erstreckt sich also nicht blos auf künstliche dioptrische Instrumente, sondern auch auf das natürliche, das Sehorgan, dessen Functionen man bis dahin nur unvollständig und ungenügend zu erklären pflegte.

Der Gauss'schen Abhandlung folgten bald andere, die sie vervollständigten und vervollkommneten. Vor allen verdienen Erwähnung die Arbeiten von Listing [1]), welcher, hauptsächlich die Anwendung der Theorie auf das menschliche Auge berücksichtigend, den beiden Punktepaaren, von welchen Gauss die Lösung aller Aufgaben abhängig machte: den Brenn- und Haupt-Punkten, ein drittes Punktepaar hinzufügte, welches, obgleich durch die früheren mitbestimmt, nicht weniger nützlich ist: die Knotenpunkte [2])

Man sollte meinen, dass diese so vereinfachte und vervollkommnete Theorie sich hätte ausbreiten und in die Schulen Eingang verschaffen müssen, namentlich nach der klaren Darstellung die ihr Listing [3]) gab und nach Veröffentlichung der französischen Ueber-

---

1) Listing, Beitrag zur physiologischen Optik, Göttingen 1845. — Mathematische Discussion des Ganges der Lichtstrahlen im Auge; Handwörterbuch der Physiologie von Wagner, Bd. IV, 1853.

2) Die Entdeckung der Knotenpunkte wird häufiger Möbius zugeschrieben. Aber wie Casorati in den historischen Notizen bemerkt, welche er seiner schätzenswerthen Abhandlung über die Haupteigenschaften der Fernrohre vorausschickt, konnten in der Arbeit von Möbius vom Jahre 1830, in der nur Systeme von Linsen betrachtet werden, die Knotenpunkte nicht als von den Hauptpunkten verschiedene Punkte hervortreten; und in der Abhandlung: Entwickelung der Lehre von den dioptrischen Bildern mit Hilfe der Collineations-Verwandtschaft (Berichte über die Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. VII, 1855) geschieht dieser Punkte keine Erwähnung. In den obcitirten Arbeiten von Listing hingegen, werden nicht nur die Existenz, sondern auch die Eigenschaften und der Gebrauch der Knotenpunkte klar angegeben. — Bemerken wir noch mit Casorati, dass die Existenz der Knotenpunkte schon von Biot bemerkt wurde, der jedoch keine Anwendung davon machte.

3) Handwörterbuch der Physiologie, Bd. IV, 1853.

setzung der Original-Abhandlung von GAUSS[1]). Und in der That, ihre Resultate hätten Stoff dargeboten, um in den Lehrbüchern der Physik und der Geodäsie eine richtige und klare Darstellung der Eigenschaften dioptrischer Instrumente an Stelle jener zu setzen, welche noch immer gewohnheitsmässig und manchmal ungenügend gegeben wurde und die nicht nur grobe Näherungen mit sich bringt, sondern sogar, wie GAUSS bemerkt, eine Unbestimmtheit und Unsicherheit der Grundvorstellungen, welche dem an die geometrische Strenge Gewöhnten widerstrebt.

Dennoch geschah es nicht, und noch heutigen Tages, 36 Jahre nach dem Bekanntwerden der GAUSS'schen Arbeit, thun selbst die ausführlicheren Lehrbücher der Physik und der Geodäsie der neuen Theorie entweder gar keine Erwähnung oder geben von ihr nur soviel, als sich direct auf die Linsen und auf das Auge bezieht, nehmen ihr also jenen Charakter der Allgemeinheit der einen ihrer werthvollsten Vorzüge bildet.

Die Erklärung dieser Thatsache ist vor allem zu suchen in der ohne Zweifel äusserst eleganten und concisen, aber auch sehr abstracten analytischen Form, in welche GAUSS das Problem eingekleidet hat. Um der neuen Theorie weitere Ausbreitung zu verschaffen, konnte man zwei Wege versuchen.

Der erste Weg bestand darin, der analytischen Beweisführung eine einfache Aufzählung der Lehrsätze und Regeln voranzuschicken, sodass sich derselben auch der mit den abstracten Methoden der Analysis nicht Vertraute bedienen kann. Dieser Ausweg, der nicht nöthigte auf die allgemeinen Formeln einzugehen, durch welche die Lage der Hauptpunkte irgend eines Systemes verknüpft sind mit seinen physikalischen und geometrischen Elementen, die nur die Analysis zu bestimmen vermag, wurde gewählt von HELMHOLTZ in der nicht ganz vollständigen, aber sehr klaren Darstellung der Methode von GAUSS, enthalten in seinem classischen Werke über die physiologische Optik[2]), und neuerlich von CASORATI im zweiten Theile seines geschätzten Buches: Alcuni strumenti topografici a

---

1) Annales de chimie et de physique, tome XXXIII, 1851.

2) Physiologische Optik, Bd. I der allgemeinen Encyclopädie der Physik von KARSTEN, Leipzig, Leopold Voss, 1856.

riflessione e le proprietà cardinali dei cannochiali anche non centrati [1]).

Der andere Weg bestand darin, jene elementaren geometrischen Beweise zu finden, deren die Resultate der Gauss'schen Theorie, einfach und geometrisch wie sie sind, fähig sein konnten; und er wurde versucht von Maxwell [2]), Neumann [3]), Gavarret [4]), Martin [5]) und Reusch [6]). Wenn die Arbeiten dieser Autoren, und vor Allen jene von Neumann, bemerkenswerth durch ihre Einfachheit und Klarheit, nicht die Verbreitung fanden die sie verdienten, so vermochten sie doch den Nachweis zu liefern, dass die geometrische Theorie, wenn sie auch nicht die obenerwähnten allgemeinsten Formeln zu liefern vermag, Formeln die übrigens für die Anwendungen nicht nothwendig sind, als Ersatz hierfür das Verdienst beanspruchen darf, klar zu machen während sie überzeugt, dem Studirenden bei jedem Schritte die geometrischen Beziehungen vor Augen zu halten, in denen der unmittelbare Grund der Thatsachen gelegen ist.

Es scheint mir, dass in den speciellen und höheren Lehrcursen, bestimmt für Solche, die mit der Analysis vertraut sind, die algebraischen Methoden, ähnlich jener von Gauss, immer vorzuziehen sein werden, dass aber die geometrische Methode das einzige wirksame Mittel abgibt, um die neue Theorie weiter zu verbreiten und ihre Einführung in die elementaren Curse der allgemeinen Physik oder der Topographie zu ermöglichen. Und weil ich über-

---

1) Mailand, Bernardoni, 1872. In dieser Arbeit wird die Theorie nach der Gauss'schen Methode entwickelt, aber zugleich vervollständigt und verbessert. Vervollständigt durch Betrachtung des Falles nicht vollkommen centrirter Systeme, verbessert durch den Gebrauch der Determinanten, mit deren Hilfe viele Ableitungen directer und klarer werden.

2) Maxwell, On the General Laws of optical Instruments; Quaterly journal of pure and applied mathematics, Bd. II, 1858.

3) Neumann, Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystemes, Leipzig, Teubner, 1866.

4) Gavarret, Des images par réflexion et par réfraction; Revue des cours scientifiques. Paris 1866.

5) Martin, Interprétation géométrique et continuation de la théorie des lentilles de Gauss; Annales de Chimie et de Physique 4. Ser. t. X. 1867.

6) Reusch, Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystemes. Leipzig, Teubner, 1870.

zeugt bin, dass dieses Mittel verdienen würde vom Neuen versucht zu werden, habe ich mich dieser Arbeit unterzogen und wage zu hoffen, dem Ziele näher gekommen zu sein, als diess bisher der Fall war.

Zwei Dinge scheinen mir hierbei nothwendig: der Theorie eine möglichst vollständige Darstellung zu geben, alsdann aber von den allgemeinen Betrachtungen zu den speciellen Fällen herabzusteigen, die sich beim Studium wirklich ausgeführter Instrumente darbieten. Meiner Ansicht nach wäre das Werkchen von Reusch viel nützlicher gewesen, wenn den Anwendungen, welche sich darin in grosser Zahl vorfinden, eine wirklich allgemeine Theorie vorausgeschickt worden wäre; und die Abhandlungen von Gavarret, Martin sowie das vorzügliche Büchlein von Neumann hätten viel mehr zur Verbreitung der neuen Theorie beigetragen, wenn sie den Studirenden nicht zu weit entfernt von den praktischen Anwendungen verlassen hätten, mit denen sich die physikalischen Lehrbücher beschäftigen, wenn die Arbeit verringert worden wäre, die sie dem Lehrenden übrig lassen, der von der allgemeinen Theorie, die sie enthalten ausgehend, seine Schüler bis zur Kenntniss der Instrumente führen muss.

Desshalb theilte ich meine Arbeit in zwei Theile:

Im ersten Theile werden die Fundamentaleigenschaften [1]) der dioptrischen Systeme im Allgemeinen abgehandelt. Die hierbei befolgte Methode hat, wenn ich mich nicht täusche, den Vorzug einer grösseren Strenge und einer grösseren Gleichförmigkeit vor jenen Methoden voraus, die in den oben angeführten Arbeiten in Verwendung kamen. Durch grössere Annäherungen als von Anderen geschehen, an die geometrischen Betrachtungen, durch welche Gauss zu den Gleichungen des gebrochenen Strahles gelangt, werden die Existenz und die Eigenschaften conjugirter Ebenen, der Brenn- und der Haupt-Ebenen nachgewiesen, ohne dass es nöthig wäre die Untersuchung nur auf Strahlen zu beschränken, die mit der Axe in einer Ebene liegen, und ohne desshalb an Leichtigkeit etwas

1) Der Ausdruck „proprietà cardinali", um jene Eigenschaften zu bezeichnen, die sich auf die Centralstrahlen und homogenes Licht beziehen, wurde von Casorati in dem citirten Werke vorgeschlagen.

einzubüssen. Dieselben Betrachtungen führen zu einem Theoreme über das Verhältniss des Winkels zweier einfallenden zum Winkel der ihnen entsprechenden austretenden Strahlen, aus welchem die Existenz der Knotenpunkte, sowie auch jene Eigenschaften der Brennweiten hervorgehen, wonach diese immer entgegengesetztes Vorzeichen haben und die eine zur anderen sich verhält wie der Brechungsindex des ersten Mediums zu dem des letzten. Bisher enthielten von den Büchern, welche die Gauss'sche Theorie nach elementarer geometrischer Methode behandeln, soviel mir bekannt, nur jenes von Neumann einen allgemeinen Beweis dieser besonders wichtigen Eigenschaft; aber dieser stützt sich auf die Benützung der Cartesischen Coordinaten, und ist rein analystisch. Ausser den Formeln zwischen den Brennweiten und den Entfernungen conjugirter Punkte von den Hauptebenen und von der Axe, welche zur Lösung aller Probleme dienen, sind noch die graphischen Constructionen hinzugefügt, welche denselben Zweck verfolgen, Constructionen welche, wie Reusch gezeigt hat, sehr bequem und genau mit Hilfe schematischer Figuren, nach zwei Scalen entworfen, ausgeführt werden können. Auch die Formeln, durch welche die Hauptpunkte eines Systemes bestimmt werden, das aus zwei gegebenen dioptrischen Systemen gebildet wird, sind zugleich mit den graphischen Constructionen entwickelt worden, welche die gleiche Lösung bezwecken und das Hauptverdienst des Werkchens von Reusch ausmachen. Endlich werden noch die Systeme ohne Hauptpunkte untersucht: die telescopischen Systeme, welche die elementaren Bücher nicht behandeln, mit Ausnahme jenes von Reusch; in dem aber der Natur der befolgten graphischen Methode nach, die Darstellungen nicht allgemein sein können.

Im zweiten Theile werden die Anwendungen gemacht auf das Auge, auf Linsen und jene Linsensysteme, die am häufigsten zur Construction der Instrumente in Verwendung kommen und endlich auf die Instrumente selbst. Wenngleich die Aenderungen nicht bedeutend sind, welche die Verwendung der neuen Methoden in der elementaren Theorie der optischen Instrumente mit sich bringt, so schien es mir doch, dass auch dieser letzte Theil verdiene mit einiger Ausführlichkeit behandelt zu werden, namentlich bezüglich

der zusammengesetzten Instrumente. Vielleicht ist es möglich diese Theorie auch in den elementaren Lehrcursen weniger unvollständig als bisher geschehen, zu behandeln; und ich hoffe, dass es wohl nicht unnütz sein dürfte, im § 3 des dritten Kapitels eine Theorie der zusammengesetzten Instrumente zu finden, in welcher die Begriffe: Vergrösserung, Ocularkreis, Helligkeit und Gesichtsfeld in allgemeiner Weise aufgestellt und durch theilweise neue Formeln ausgedrückt werden, die sich auf alle Instrumente, Mikroskope wie Fernrohre anwenden lassen, indem man über den Werth der darin vorkommenden Grössen geeignete Voraussetzungen macht.

Die für das Gesichtsfeld gegebene Definition sowie die Constructionen und Formeln zur Bestimmung desselben, weichen von denen die man gewöhnlich gibt, ab. Man pflegt unter Gesichtsfeld die Oeffnung des Kegels zu verstehen, der seine Spitze im ersten Hauptpunkte des Objectives (oder im Scheitelpunkte des Objectives, wenn man dasselbe als unendlich dünn annimmt) hat und jenen Theil des Objectraumes begrenzt, den man durch das Instrument auf einmal überblicken kann; wenn diese Definition nicht ausdrücklich gegeben wird, so wird sie doch als selbstverständlich vorausgesetzt, und auf sie gründen sich die experimentellen Methoden, welche zur Bestimmung des Gesichtsfeldes angegeben werden. Um jedoch das Gesichtsfeld theoretisch zu bestimmen, wird dasselbe als gleich dem doppelten Winkel angesehen, welchen jener Hauptstrahl mit der Axe bildet, der unter allen die aus dem Instrumente treten können, die grösste Neigung besitzt und man reducirt so das Problem auf die Bestimmung des Weges dieses Strahles und seiner Durchschnitte mit den einzelnen Linsen. Nun entsprechen sich aber in den meisten Fällen die angeführte Definition und die Art der Rechnung nicht; in guten Instrumenten begrenzt das Diaphragma den sichtbaren Raum und reducirt ihn womöglich auf jenen Theil, welcher unter grösster gleichförmiger Helligkeit erscheint; die Punkte aber, entsprechend jenen Hauptstrahlen welche unter allen die aus dem Oculare treten könnten, wenn das Diaphragma nicht vorhanden wäre, die grösste Neigung haben, würde man unter einer Helligkeit sehen, beiläufig nur halb so gross als die centrale Helligkeit. Dieser Widerspruch ist in der vorliegenden

Arbeit durch eine Definition und Rechnungsart beseitigt worden, die vollständig mit der Bedeutung des Wortes Gesichtsfeld im gewöhnlichen Sprachgebrauche zusammenfällt, sobald das Instrument zu denen mit reellen Bildern gehört und ein gut angepasstes Diaphragma besitzt. Als Gesichtsfeld wird definirt: der Oeffnungswinkel des Kegels, der seine Spitze im ersten Hauptpunkt des Objectives hat und jenen auf einmal zu überblickenden Theil des Objectes begrenzt, der unter gleicher und zugleich grösster Helligkeit erscheint; die zu seiner Bestimmung dienenden Constructionen und Formeln entsprechen dieser Definition. Die Formeln unterscheiden sich von jenen, zu welchen die gewöhnliche Methode führt, die nur auf der Betrachtung der Hauptstrahlen basirt, dadurch, dass in ersteren der Radius des Ocularkreises und daher auch die Objectivöffnung vorkommt; und es ist zu bemerken, dass der Unterschied verschwindet, wenn man den Radius des Ocularringes gleich Null, also die Objectivöffnung unendlich klein voraussetzt. Die gewöhnlichen Formeln sind also ein specieller Fall der unserigen. Bei Instrumenten die keine reellen Bilder liefern ist es bisweilen unmöglich den sichtbaren Raum mittelst eines Diaphragmas auf jenen Theil zu reduciren, der unter gleichförmiger Helligkeit erscheint, und dann hört unsere Definition auf dem gewöhnlichen Sprachgebrauche zu entsprechen; aber die Formeln, zu welchen sie führt, geben Veranlassung zu nützlichen Betrachtungen über den Einfluss der Objectivöffnung auf die Helligkeit, unter welcher durch das Instrument verschiedene Theile des Objectes gesehen werden.

Nachdem die allgemeine Theorie dargelegt ist, beschränkt sich das speciellere Studium der Mikroskope und Fernrohre auf eine ausführlichere Beschreibung der Anordnung der Linsen und auf eine Discussion der entwickelten Formeln in specielleren Fällen. Obgleich es nicht im Plane dieses Buches liegt, in eine Untersuchung über die Eigenthümlichkeiten der Construction und des praktischen Gebrauches der Instrumente einzugeben, so hielt ich es doch für gut, einige ganz kurze Bemerkungen hierüber zu machen, die sich als unmittelbare Consequenzen der Theorie ergaben und deren Wichtigkeit zu zeigen im Stande waren.

Durch Aufnahme der Fälle, in welchen nebst brechenden Ober-

flächen reflectirende vorkommen, mit den Linsen noch Spiegel combinirt werden, hätte man dem Buche leicht eine grössere Allgemeinheit geben können. Es wäre nur einfach zu bemerken gewesen, dass die Constructionen und Formeln im ersten Kapitel des ersten Theiles sich auf sphärische Spiegel anwenden lassen, sobald man in ihnen $n' = n$ setzt und übereinkommt, die Entfernung eines Punktes vom Spiegel als positiv oder negativ zu betrachten, jenachdem das Licht sich vom Spiegel gegen den Punkt oder vom Punkte gegen den Spiegel fortbewegt, oder als sich fortbewegend zu denken ist. Ich habe es jedoch unterlassen, denn ich fürchtete hierdurch die Schwierigkeiten zu vermehren, welche ohnehin schon die Uebereinkunft über die Vorzeichen der Anwendung darbieten dürfte, und der Darstellung einen abstracten Charakter zu geben, der vielleicht schon zu gross ist in einer Arbeit wie diese, deren Zweck um so besser wird erreicht werden, je mehr sie für leicht und elementar gehalten werden wird.

Turin, im December 1876.

Galileo Ferraris.

Vorwort des Uebersetzers.

Wie der Verfasser sehr richtig in seiner lesenswerthen Vorrede hervorhebt, haben die Resultate, mit denen Gauss durch seine berühmte Abhandlung über Dioptrik vor fast 40 Jahren die Wissenschaft bereicherte, noch immer nicht die gehörige Beachtung gefunden, namentlich nicht in den elementaren Darstellungen der Eigenschaften dioptrischer Instrumente.

Das vorliegende Buch stellt sich die Aufgabe, einestheils eine elementare geometrische Entwickelung der Gauss'schen Theorie, sodann aber auch die Anwendung dieser Thorie auf dioptrische Instrumente zu geben. Der Leser wird finden, dass der Verfasser dieser Aufgabe in vorzüglicher Weise gerecht wird. Bei aller Strenge, Allgemeinheit und Vollständigkeit in der Darstellung, werden die allgemeine Theorie sowie ihre Anwendungen mit äusserst geringen Mitteln erledigt. Das Buch bezeichnet in der That einen Fortschritt der elementaren Dioptrik nach zwei Richtungen hin; durch die Vervollkommnung und Vereinfachung der geometrischen Methode bei der Entwickelung der allgemeinen Theorie, sowie durch den Umstand, dass es an diese eine ausführliche specielle Theorie der dioptrischen Instrumente fügt und hierdurch einem fühlbaren Mangel in der einschlägigen Literatur abhilft.

Ich habe daher gerne der Aufforderung von Seite der Verlagshandlung entsprochen, dieses Buch ins Deutsche zu übertragen. Ich kann nur wünschen, dass die ausgezeichneten Eigenschaften des Originales, seine Einfachheit und Klarheit in der Darstellung durch die Uebersetzung Nichts eingebüsst haben möchten. Eine möglichst wortgetreue Wiedergabe des italienischen Textes schien mir in dieser Beziehung das Geeignetste, dürfte aber auch der

Grund sein, wenn hier und da Härten in der Ausdrucksweise hervortreten sollten.

Der Anhang, den ich beigefügt, will keineswegs Mängel des Originals beseitigen; es scheint vielmehr die Einfachheit und Klarheit zu erhöhen, wenn sich die Darstellung auf die Benutzung jener Fundamentalpunkte beschränkt, die sich, wie die Brennpunkte, die Gauss'schen Hauptpunkte und die Listing'schen Knotenpunkte, als Verallgemeinerungen gewisser Grundpunkte einer einzigen brechenden Fläche in der Entwickelung fast von selbst ergeben und als Fundamentalpunkte catexochen zu betrachten sind. Da aber in neueren deutschen Bearbeitungen der Dioptrik auch der Töpler-schen Haupt- und Knotenpunkte sowie der Listing'schen symptotischen Punkte Erwähnung geschieht, so schien mir eine kurze Darlegung der Eigenschaften dieser Punkte und ihres Gebrauches bei der Bestimmung conjugirter Strahlen und Punkte nicht ganz überflüssig.

Die Methode von Reusch zur Construction des Weges eines Lichtstrahles durch ein dioptrisches System ist einer Abänderung fähig, die sich zur ersteren etwa ebenso verhält, wie die neueren graphostatischen Constructionsmethoden zu den älteren, bei denen die Zusammensetzung der Kräfte in einer einzigen Figur ausgeführt wurde, und die in complicirteren Fällen durch Ueberladung mit Constructionslinien unbequem und schwer übersichtlich wurde. Die in § 2 des Anhanges gezeigte Construction habe ich auf ihre Bequemlichkeit und Genauigkeit erprobt; sie dürfte sich für dioptrische Untersuchungen des Auges, namentlich wenn die Schichtung der Krystalllinse in Betracht gezogen wird, in welchem Falle die Rechnung äusserst mühsam und zeitraubend ist, bei Bestimmung der Fundamentalpunkte von Mikroskopobjectiven, überhaupt in allen Fällen zur Anwendung empfehlen, in denen ein erheblich vergrösserter Maassstab der Zeichnung eine entsprechende Genauigkeit zu erreichen gestattet.

Prag, im October 1879.

F. Lippich.

Inhaltsübersicht.

ERSTER THEIL.

Die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Systeme im Allgemeinen.

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Zwei Medien.

Zweites Kapitel.

System von mehr als zwei Medien.

§. 1. *Existenz und Eigenschaften der Fundamentalpunkte.*

§. 2. *Gebrauch der Fundamentalpunkte, Constructionen und Formeln für irgend ein dioptrisches System.*

§. 3. *Bestimmung der Fundamentalpunkte.*

§. 4. *Telescopische Systeme.*

ZWEITER THEIL.

Anwendungen.

Erstes Kapitel.

Das Auge.

Zweites Kapitel.

Linsen und Linsensysteme.

§. 1. *Allgemeine Eigenschaften.*

§. 2. *Bestimmung der Fundamentalpunkte. Verschiedene Arten von Linsen.*

§. 3. *Unendlich dünne Linsen.*

§. 4. *Das Mikroskop.*

§. 5. *Fernrohre.*

Anhang.

§ 1. *Weitere bemerkenswerthe Punkte eines dioptrischen Systemes.*

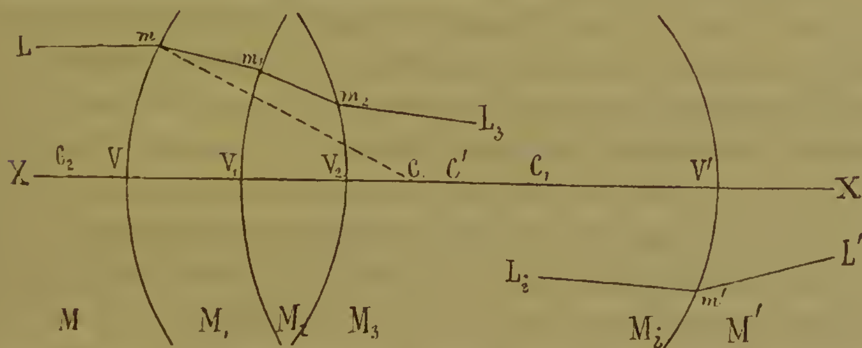
ERSTER THEIL.

Die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Systeme im Allgemeinen.

Einleitung.

1. Wir nennen centrirtes System brechender Medien oder centrirtes dioptrisches System eine Reihe durchsichtiger Körper M, M_1, M_2, ... M' (Fig. 1), die voneinander durch Kugelflächen Vm, $V_1 m_1$, $V_2 m_2$ ... $V'm'$ getrennt sind, deren Mittelpunkte C, C_1, C_2 ... C' sämmtlich auf derselben Geraden XX liegen; Tren-

Fig. 1.



nungsfläche nennen wir die Kugelfläche, welche zwei aufeinanderfolgende Medien trennt; Centralaxe oder einfach Axe des Systems die Gerade, auf der die sämmtlichen Mittelpunkte der Trennungsflächen liegen; Scheitel die Schnittpunkte dieser mit der Axe.

Ein Lichtstrahl, welcher das System durchdringt, bildet eine gebrochene Linie $L m m_1 m_2 L_3 \,..\, L_2 m' L'$. Das erste Stück derselben,

Lm, also jenen Theil, welchen das Licht im ersten Medium durchläuft, bevor es die erste Trennungsfläche trifft, nennt man den einfallenden Strahl; die übrigen Stücke mm_1, m_1m_2, $m_2L_3 \dots L_2m'$, $m'L$, die gebrochenen Strahlen der Medien M_1, M_2, $M_3 \dots M_i$, M'. Den gebrochenen Strahl des letzten Mediums, d. i. den Theil $m'L'$, nennt man auch den austretenden Strahl.

Ein beliebiges System, das aus mehr als zwei Medien besteht, kann man sich immer durch die Vereinigung anderer Systeme gebildet denken, die eine geringere Zahl von Medien enthalten. So kann z. B. das durch Fig. 1 dargestellte System als aus zwei Systemen zusammengesetzt angesehen werden, von denen das erste aus den Medien M, M_1, und das zweite aus den Medien M_1, M_2, $M_3 \dots M_i$, M' besteht, oder aber auch so, dass das erste System gebildet wird von den Medien M, M_1, M_2, und das zweite von den Medien M_2, $M_3 \dots M_i$, M', u. s. w. In analoger Weise kann man sich das System in drei oder mehr Partial-Systeme zerlegt denken.

Für irgend eines dieser Partialsysteme ist der einfallende Strahl der gebrochene seines ersten Mediums und der austretende Strahl der gebrochene Strahl seines letzten Mediums. Der austretende Strahl des einen Systems ist der eintretende Strahl des folgenden.

Insofern in den folgenden Untersuchungen nicht blos die wirklich vom Lichte in den aufeinander folgenden Medien durchlaufenen Wege in Betracht kommen, sondern die unendlichen Geraden, in denen sie liegen, so erscheint es zweckmässig diese Geraden zu benennen. Wir werden gelegentlich Einfallsgerade die unendliche Gerade nennen, auf welcher der einfallende Strahl liegt, und Austrittsgerade jene, die den austretenden Strahl enthält [1]).

2. Ein dioptrisches System ist bestimmt, wenn die Lagen der Scheitel und die Mittelpunkte der Trennungsflächen, sowie die absoluten Brechungsindices der Medien gegeben sind, aus denen ersteres besteht.

---

1) Die Benennungen retta di incidenza und retta di emergenza wurden, wie ich glaube, zum ersten Male von Casorati in dem citirten Buche angewendet.

[Einfallsgerade und Austrittsgerade dürften, ohne zu hart zu klingen, den italienischen Ausdrücken am besten entsprechen; für „retta di rifrazione“, das überdiess im Texte des Originals erscheint, wurde kein eigenes deutsches Wort eingeführt. Anmerkung des Uebersetzers.]

Sind im ersten Mittel M irgend welche einfallende Strahlen gegeben, so handelt es sich darum die Gesammtheit der austretenden Strahlen zu finden, in welche die ersteren durch die Wirkung des Systems transformirt werden.

Wir wollen dieses Problem nur lösen unter der Voraussetzung homogenen Lichtes und nur für den Fall als die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) Dass ein beliebiger der gegebenen Strahlen auf seinem Wege durch das System, z. B. auf dem Wege $L m m_1 m_2 L_3 \ldots L_2 m' L'$ (Fig. 1), die aufeinander folgenden Trennungsflächen in solchen Punkten m trifft, für welche der vom Mittelpunkte der Trennungsfläche zu diesem Punkte gezogene Radius Cm mit der Axe des Systems einen so kleinen Winkel bildet, dass die höheren Potenzen des Sinus dieses Winkels gegen die erste vernachlässigt werden können. In diesem Falle darf man den Sinus und die Tangente des Winkels gleich der Länge des Bogens vom Radius Eins nehmen, der dem Winkel entspricht, den Cosinus gleich Eins und den Sinus versus gleich Null.

2) Dass von derselben Ordnung der Kleinheit auch die Winkel sind, die irgend ein Theil eines jeden der betrachteten Lichtstrahlen mit der Axe des Systems einschliesst.

Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, nennt man die Strahlen Centralstrahlen.

Die Eigenschaften der dioptrischen Systeme, die sich auf die Centralstrahlen beziehen, bezeichnen wir als die Fundamentaleigenschaften derselben. Sie sind für ein wirkliches dioptrisches System nur in erster Annäherung giltig und die Unterschiede zwischen dem thatsächlich vorhandenen Falle und dem angenommenen Falle blosser Centralstrahlen bedingt die sogenannte sphärische Abweichung. Da man aber in jedem guten Instrumente diese Abweichung möglichst klein zu machen sucht, so genügen die Haupteigenschaften zur Untersuchung der allgemeinen Wirkungsweise dioptrischer Instrumente.

Um diese Eigenschaften aufzufinden, werden wir mit dem einfachen Falle beginnen, in welchem nur zwei brechende Medien vorhanden sind, also nur eine Trennungsfläche zu betrachten ist; sodann werden wir zu dem allgemeinen Falle übergehen.

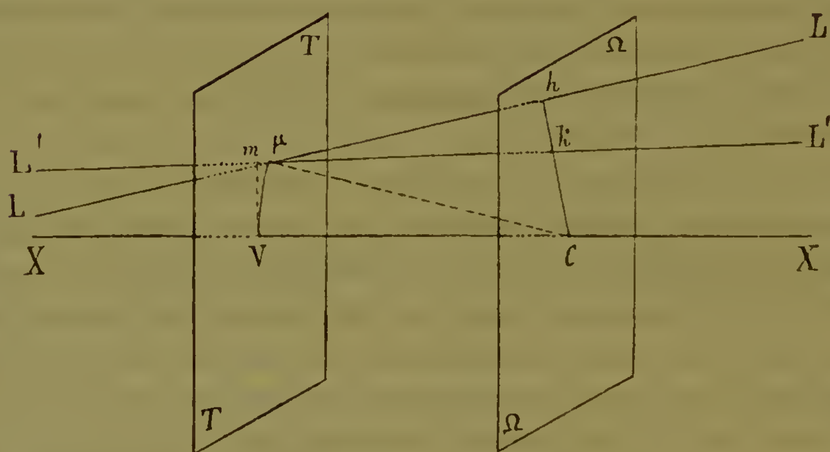
ERSTES KAPITEL.

Zwei brechende Medien.

3. Im Falle einer einzigen Trennungsfläche wird man alle Einfallspunkte auf einer Kugelcalotte von sehr kleiner Ausdehnung gelegen anzunehmen haben. Man wird dann als Axe jenen Kugelradius bezeichnen können, der senkrecht steht auf der Ebene des Begrenzungskreises der Calotte und als Scheitel den Schnittpunkt der Calotte mit der Axe.

4. Es sei V der Scheitel und C der Mittelpunkt einer Kugelfläche vom Radius $VC = r$ (Fig. 2), längs welcher zwei durchsichtige Mittel mit den absoluten Brechungsindices n und n' aneinandergrenzen und es sei μ der Einfallspunkt eines centralen Lichtstrahles, der auf der Einfallsgeraden $L\mu L$ liegt. Indem man durch den Mittel-

Fig. 2.



punkt C die Ebene $\Omega\Omega$ senkrecht zur Axe legt, sei Ch der Durchschnitt dieser Ebene mit der Einfallsebene $C\mu L$. In Folge des Fundamentalgesetzes der einfachen Brechung muss der gebrochene Strahl $\mu L'$ in der Einfallsebene liegen und daher die Gerade Ch schneiden in einem Punkte k; seine Richtung aber ist bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\sin C\mu h}{\sin C\mu k} = \frac{n'}{n}. \tag{1}$$

Nun ist in dem Dreiecke $C\mu h$

$$\frac{\sin C\mu h}{\sin \mu hC} = \frac{Ch}{C\mu} = \frac{Ch}{r},$$

oder

$$\sin C\mu h = \frac{Ch}{r} \sin \mu hC,$$

in ähnlicher Weise hat man in dem Dreiecke $C\mu k$

$$\sin C\mu k = \frac{Ck}{r} \sin \mu kC,$$

und wenn man diese Werthe in die Gleichung (1) setzt, so gibt sie

$$\frac{Ch}{Ck} \frac{\sin \mu hC}{\sin \mu kC} = \frac{n'}{n}.$$

Diese Gleichung, welche für beliebige Werthe der Einfalls- und Brechungswinkel in aller Strenge gilt, vereinfacht sich im Falle centraler Strahlen. In diesem Falle werden nämlich die Winkel μhC und μkC von einem rechten Winkel nur um Grössen verschieden sein, die von demselben Kleinheitsgrad sind wie die Einfalls- und Brechungswinkel. Wenn wir also jenen Grad der Annäherung eintreten lassen, auf welchen wir uns nach der im Artikel (2) getroffenen Uebereinkunft zu beschränken haben, so wird

$$\frac{Ch}{Ck} = \frac{n'}{n}.$$

Um daher den gebrochenen Strahl zu construiren, der zu einem gegebenen einfallenden Strahl gehört, ergibt sich die folgende

Regel: Man verbinde den Kugelmittelpunkt C mit jenem Punkte h, in welchem die Einfallsgerade die durch C senkrecht zur Axe geführte Ebene $\Omega\Omega$ schneidet, und bestimme auf dieser Geraden Ch den Punkt k so, dass dessen Entfernung von C zu Ch sich ebenso verhalte wie der Brechungsindex des ersten Mediums zu dem des zweiten; die Gerade $L'\mu kL'$, welche diesen Punkt

mit dem Einfallspunkt verbindet, ist alsdann die Austrittsgerade.

5. Geht die Einfallsgerade durch den Mittelpunkt, so zeigt diese Regel sofort, dass in diesem Falle die Austrittsgerade mit der Einfallsgeraden zusammenfällt.

6. Ebenso folgt aus der gegebenen Construction, dass, wenn die Einfallsgerade LL und die Axe XX in einer und derselben Ebene liegen, die Austrittsgerade $L'L'$ ebenfalls in dieser Ebene liegt. In der That liegen zwei ihrer Punkte, μ und k, in dieser Ebene.

7. Durch den Scheitel führe man die Ebene TT tangential an die brechende Oberfläche (Fig. 2) und daher senkrecht zur Axe, dann sei m der Schnittpunkt der Geraden LL mit dieser Ebene. Die Entfernung $m\mu$ ist von der Ordnung des Sinus versus des Winkels $VC\mu$, und man kann daher nach der in (2) festgesetzten Annäherung ohne merklichen Fehler an Stelle der Geraden μk, die Gerade mk setzen und diese als Austrittsgerade ansehen.

Diess soll im Folgenden immer geschehen und zur Abkürzung der Ausdrucksweise werden wir Einfallspunkt den Punkt m nennen, in welchem eine gegebene Einfallsgerade die Tangentenebene im Scheitel der Trennungsfläche schneidet.

8. Nehmen wir jetzt nicht mehr eine einzige Einfallsgerade an, sondern ein Bündel von beliebig vielen Einfallsgeraden, die alle durch einen und denselben Punkt hindurchgehen.

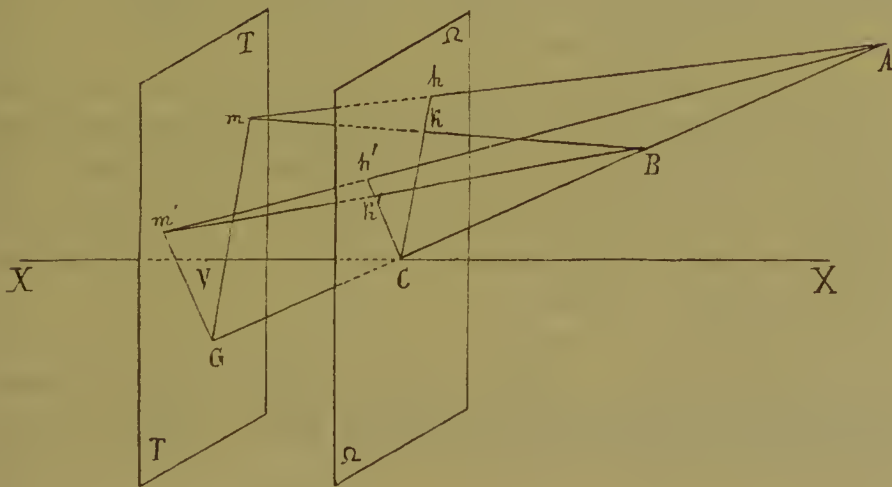
Es seien wie früher (Fig. 3) V der Scheitel und C der Mittelpunkt der brechenden Kugelfläche, TT die Tangentenebene an diese in V und $\Omega\Omega$ die durch C senkrecht zur Axe XX gelegte Ebene, es sei ferner gegeben ein Bündel von Einfallsgeraden mA, $m'A$ . . . die alle durch denselben Punkt A hindurchgehen. Man ziehe die Gerade ACG und betrachte irgend eine der gegebenen Einfallsgeraden, z. B. mA. Um den dieser Geraden entsprechenden gebrochenen Strahl zu erhalten, wird man nach der Regel (4) auf Ch, dem Durchschnitte der Ebene mAC mit der Ebene $\Omega\Omega$, die Strecke Ck so wählen, dass

$$\frac{Ch}{Ck} = \frac{n'}{n}$$

wird und die Verbindungsgerade mk ziehen. Diese Gerade, da sie in der Ebene mAC liegt, wird ACG schneiden; es sei B dieser Durchschnittspunkt. Durch den Punkt B gehen alsdann auch die gebrochenen Strahlen hindurch, die den übrigen Geraden des einfallenden Bündels entsprechen, so dass z. B. durch B auch der gebrochene Strahl geht, welcher der Einfallsgeraden $m'A$ entspricht.

In der That, zieht man $m'B$, so entstehen zwei Pyramiden, $AGmm'$, $BGmm'$, die ihre gemeinsame Basis Gmm' in der Ebene TT haben und die von der Ebene $\Omega\Omega$ in den Figuren Chh' und Ckk' geschnitten werden. Da die Ebene $\Omega\Omega$ parallel zur Basis ist, so

Fig. 3.



sind die genannten Figuren ähnlich zur Basis und daher auch untereinander ähnlich, so dass man hat

$$\frac{Ch'}{Ck'} = \frac{Ch}{Ck} = \frac{n'}{n}.$$

Also bestimmt die Gerade $m'B$ auf Ch' eine Strecke Ck', sodass

$$\frac{Ch'}{Ck'} = \frac{n'}{n}$$

ist, woraus nach Regel (4) folgt, dass sie die Austrittgerade ist, die der Geraden $m'A$ entspricht.

Da nun Gleiches gezeigt werden kann von der Geraden, die den Punkt *B* mit dem Einfallspunkte irgend eines anderen einfallenden Strahles verbindet, so hat man den Beweis für folgenden

Satz. Einem beliebigen Bündel von Einfallsgeraden, die alle durch denselben Punkt *A* hindurchgehen, entspricht ein Bündel von Austrittsgeraden, die alle durch denselben Punkt *B* gehen, der auf der Verbindungslinie von *A* mit dem Mittelpunkte der brechenden Fläche gelegen ist.

Es ist klar, dass dieser Satz auch noch gilt wenn *A* oder *B* unendlich weit liegen, d. h. wenn die Einfallsgeraden oder die Austrittsgeraden parallel zu *ACG* sind. Dann ist eine der beiden Figuren *Chh'*, *Ckk'* gleich *Gmm'* und daher die andere ihr ähnlich, weil sie ähnlich ist der Figur *Gmm'*.

9. Es ist einleuchtend, dass wenn das Licht sich in einem Sinne fortpflanzen würde, der dem oben angenommenen gerade entgegengesetzt ist und überginge vom zweiten Medium in das erste, dass auch einem Bündel von Einfallsgeraden, die alle durch *B* gehen, ein Bündel von austretenden Strahlen entsprechen würde, die sämmtlich durch den Punkt *A* gehen.

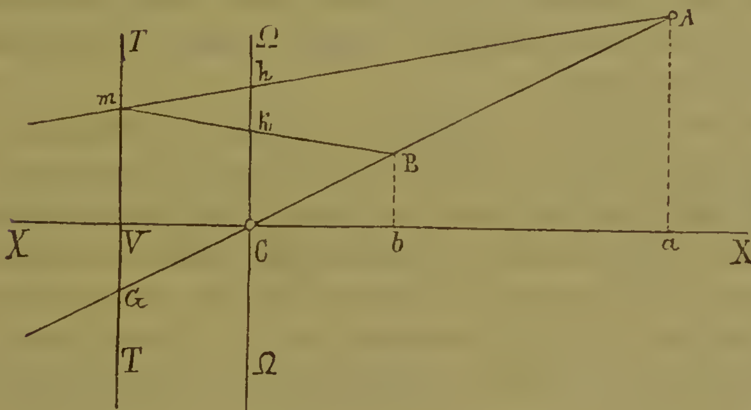
Zwei Punkte, wie *A* und *B*, welche die Eigenschaft haben, dass allen Einfallsgeraden, die durch einen derselben gehen, Austrittsgerade entsprechen, die den anderen Punkt treffen, nennt man conjugirte Punkte.

Zwei conjugirte Punkte liegen immer auf einer Geraden, die durch das Centrum geht (8) und liegen daher immer in einer Ebene, die auch die Axe enthält.

10. Nachdem bewiesen ist, dass immer Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, nach der Brechung in einem anderen Punkte sich vereinigen, der zum ersteren conjugirt ist, entweder direct oder indem sie entsprechend verlängert werden (9), und nachdem gezeigt wurde, dass immer die beiden Punkte mit der Axe in einer und derselben Ebene liegen, können wir von nun an, ohne im Geringsten die Allgemeinheit und Strenge der Darstellung zu beeinträchtigen, unsere Betrachtungen auf Strahlen beschränken, die in dieser Ebene liegen.

An Stelle der Tangentenebene im Scheitel der brechenden Fläche tritt dann die Gerade TT (Fig. 4), nach welcher erstere die Ebene der Figur schneidet; die Gerade $\Omega\Omega$, durch den Mittelpunkt senkrecht zur Axe XX geführt, repräsentirt die durch diesen Punkt senkrecht zur Axe geführte Ebene, und irgend eine Gerade aA, die senkrecht zur Axe ist, wird eine durch a zur selben Axe senkrechte Ebene repräsentiren können. Wenn die Allgemeinheit es erfordert, werden wir an Stelle des Wortes Gerade das Wort Ebene setzen und also sagen können: die Ebene TT, die Ebene $\Omega\Omega$, die Ebene aA u. s. f.

Fig. 4.



Um in unserer Figur den zu einem gegebenen Punkte A gehörigen conjugirten Punkt zu finden, hat man eine Einfallsgerade mA durch A zu ziehen, sodann

$$Ck = \frac{n}{n'} Ch$$

zu machen und m mit k zu verbinden, diese Gerade wird die dem mA entsprechende Austrittsgerade sein, welche ACG in dem gesuchten Punkte B schneidet.

11. Eine Figur wie die Figur 4, deren wir uns zur Erläuterung bedient haben, könnte nicht die wirklichen Lagen der leuchtenden Punkte und der Lichtstrahlen darstellen; hierfür wäre es nöthig (2), dass die Punkte A, B, m, h, k alle unendlich nahe der Axe lägen und dass die Geraden mA, mB, AG mit der Axe und untereinander unendlich kleine Winkel bildeten. Aber in einer solchen Figur wären

keinerlei graphische Operationen möglich. Wir können jedoch diese Schwierigkeit vermeiden, indem wir die Figur nicht als Darstellung der wirklichen Lagen der Punkte und Geraden betrachten, sondern als eine veränderte Figur, die aus der wirklichen hervorgeht, indem wir die Dimensionen parallel zur Axe unverändert lassen, die Entfernung aller Punkte von der Axe hingegen mit einer constanten sehr grossen Zahl g multipliziren. Ist eine derartig abgeänderte Figur gegeben, so kann man umgekehrt aus ihr die wirkliche ableiten, indem man die Distanzen aller Punkte von der Axe durch die Zahl g dividirt. Die Geometrie lehrt, dass in zwei auf die angegebene Weise auseinander abgeleiteten Figuren, gerade Linien in der einen Geraden in der anderen und desgleichen parallele Gerade wieder parallelen Geraden entsprechen.

In der abgeleiteten Figur kann irgend eine Gerade mA, die beliebig gegen die Axe geneigt ist, eine centrale Einfallsgerade darstellen, und es ist klar, dass wenn man mit ihr in der vorher angegebenen Weise verfährt, die Gerade mB, welche man erhält, die entsprechende Austrittsgerade repräsentiren wird. In ähnlicher Weise wird jeder Punkt A einen leuchtenden Punkt vorstellen können und der aus ihm in der obigen Weise abgeleitete Punkt B seinen conjugirten Punkt.

Durch diese Uebereinkunft können die bisher gezeigten Constructionen und alle jene, die sich im Verlaufe dieser Untersuchung noch ergeben werden, zur wirklichen graphischen Lösung der Aufgaben dienen. Zur grösseren Genauigkeit der Constructionen werden die Einfallspunkte in etwas grösserer Entfernung von der Axe zu wählen sein, damit die Winkel nicht zu spitz ausfallen.

Der Kürze halber und ohne Gefahr eines Irrthums können wir die Linien und Punkte der abgeleiteten Figur ebenso benennen wie die entsprechenden Linien und Punkte in der wirklichen Figur. So wird man z. B. mA als eine Einfallsgerade, mB als eine Austrittsgerade, Cm als einen Radius der sphärischen Trennungsfläche, m als Einfallspunkt, A, B als zwei conjugirte Punkte bezeichnen.

12. Die beiden Paare ähnlicher Dreiecke AGm, ACh und BGm, BCk geben: $\frac{CA}{GA} = \frac{Ch}{Gm}$ und $\frac{CB}{GB} = \frac{Ck}{Gm}$.

woraus wegen

$$\frac{Ch}{Ck} = \frac{n'}{n}$$

folgt

$$\frac{CB}{GB} = \frac{n}{n'} \frac{CA}{GA}.$$

Fällt man aus den Punkten A und B die Perpendikel Aa, Bb auf die Axe XX, so entstehen die ähnlichen Dreiecke ACa, BCb, GCV, aus denen sich ergibt

$$\frac{CA}{GA} = \frac{Ca}{Va}, \quad \frac{CB}{GB} = \frac{Cb}{Vb}.$$

und dieses in die vorige Gleichung eingesetzt liefert

$$\frac{Cb}{Vb} = \frac{n}{n'} \frac{Ca}{Va}. \tag{1}$$

Ueberdiess ist in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke ACa, BCb

$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{Ca}{Cb}. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) bestimmen die Lage des Punktes B, wenn A gegeben ist und umgekehrt.

Wir werden die Entfernungen Va und Vb der Punkte A und B von der Ebene TT durch die Buchstaben x und x', die Entfernungen Aa und Bb derselben Punkte von der Axe XX mit y und y' und den Radius der Trennungsfläche mit r bezeichnen; hierbei sollen x, x', r als positiv betrachtet werden, wenn, wie in Fig. 4, die Punkte ABC sich auf jener Seite von TT befinden, nach welcher hin sich das Licht fortpflanzt und als negativ im entgegengeseten Falle; ebenso werden wir die y, y' als positiv oder negativ betrachten, je nachdem die Punkte A und B oberhalb oder unterhalb der Axe XX gelegen sind.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen haben wir

$$Ca = x - r, \qquad Cb = x' - r,$$

und die Formeln (1) und (2) können geschrieben werden

$$\frac{x' - r}{x'} = \frac{n}{n'} \frac{x - r}{x}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{x-r}{x'-r},$$

oder auch

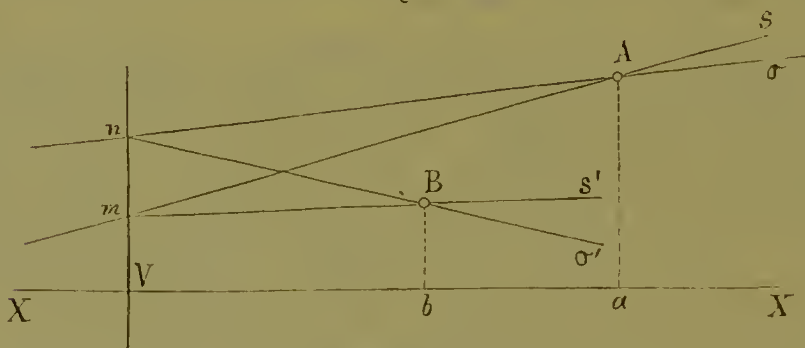
$$\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \frac{n'-n}{r}, \tag{I}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{n'}{n}\frac{x}{x'} = 1 + \frac{n'-n}{nr}x. \tag{II}$$

13. Den beiden Relationen (I) und (II) zwischen den Distanzen x, x', y, y', durch welche die Lagen zweier conjugirter Punkte bestimmt werden, können wir eine ebenso einfache hinzufügen zwischen dem Winkel $sA\sigma$ (Fig. 5), den zwei einfallende Strahlen ms, $n\sigma$ mit einander bilden, die durch A gehen, und dem Winkel $s'B\sigma'$ der entsprechenden durch B gehenden Austrittsgeraden.

Wir wollen festsetzen, dass als Schenkel der genannten Winkel jene Theile der Aus- oder Eintrittsgeraden anzusehen seien, die bezüglich der Scheitel A und B auf jener Seite liegen, nach welcher hin sich das Licht ausbreitet, und dass die beiden Winkel gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen erhalten, je nachdem $B\sigma'$ gegen Bs' und As gegen As übereinstimmend oder entgegengesetzt liegen.

Fig. 5.



Dieses vorausgesetzt, hat man zunächst aus den Dreiecken Amn, Bmn

$$\sin sA\sigma = \frac{mn}{mA}\sin Anm, \qquad \sin s'B\sigma' = \frac{mn}{mB}\sin Bnm,$$

oder auch, weil

$$mA = \frac{Va}{\sin Amn} = \frac{x}{\sin Amn}, \qquad mB = \frac{Vb}{\sin Bmn} = \frac{x'}{\sin Bmn}$$

ist, die folgenden Gleichungen:

$$\sin sA\sigma = \frac{mn}{x} \sin Amn \sin Anm,$$

$$\sin s'B\sigma' = \frac{mn}{x'} \sin Bmn \sin Bnm.$$

Indem man beachtet, dass die Winkel Amn, Anm, Bmn, Bnm so wenig von einem Rechten verschieden sind, dass man ihre Sinusse gleich Eins setzen kann, die Winkel $sA\sigma$ und $s'B\sigma'$ an Stelle ihrer Sinusse gesetzt werden dürfen (2), kann man die obigen Gleichungen einfacher schreiben:

$$\sphericalangle\, sA\sigma = \frac{mn}{x}, \qquad \sphericalangle\, s'B\sigma' = \frac{mn}{x'}.$$

Bezeichnet man mit ω und ω' die beiden Winkel, so folgt weiter

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{x'}{x} \tag{3}$$

und wegen Gleichung (II) auch

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{y'}{y}. \tag{III}$$

14. Die Gleichung (I) zeigt, dass der Werth von x' unabhängig ist von y und nur einfach von x abhängt. Da aber x dasselbe ist für alle Punkte der Ebene, die durch a senkrecht zur Axe geführt wird, so gilt folgender

Satz. Alle Punkte einer zur Axe senkrechten Ebene haben conjugirte Punkte, die in einer anderen zur Axe senkrechten Ebene liegen.

Zwei Ebenen, welche die Eigenschaft haben, dass jedem Punkte der einen ein Punkt der anderen als conjugirter entspricht, nennt man conjugirte Ebenen.

15. Die Gleichung (II) sagt, dass das Verhältniss $y':y$ der Entfernungen zweier conjugirter Punkte von der Axe unabhängig ist von dem absoluten Werthe dieser Entfernungen und nur abhängig ist von der Lage der bei-

den conjugirten Ebenen, in denen die beiden conjugirten Punkte liegen.

16. Endlich drückt die Gleichung (III) aus, dass das Verhältniss des Winkels irgend zweier Einfallsgeraden, die durch den Punkt A gehen, zum Winkel der beiden entsprechenden Austrittsgeraden, die sich im Punkte B schneiden, der conjugirt ist zu A, nur abhängig ist von der Lage der conjugirten Ebenen, in denen A und B liegen und unabhängig ist von der Lage der Punkte in diesen Ebenen. Dieses constante Verhältniss ist für ein gegebenes Paar conjugirter Ebenen gleich dem Verhältniss des Brechungsindex des zweiten Mediums zu dem des ersten, multiplizirt mit dem Verhältniss der Abstände der Punkte B und A von der Axe.

Da für $x = o$ aus (II) $y : y' = 1$ folgt und für $x = r$ aus (I) $x' = x = r$ und daher aus (II) $y' : y = n : n'$ sich ergibt, so ist also das Verhältniss der obengenannten Winkel gleich $n' : n$ wenn der Punkt A in die Trennungsfläche fällt, und gleich Eins, d. h. die Winkel werden einander gleich wenn A in der durch den Mittelpunkt der Trennungsfläche zur Axe senkrecht geführten Ebene liegt, in welche Ebene dann auch der conjugirte Punkt B hineinfällt.

17. Da zwei conjugirte Punkte immer mit dem Centrum auf einer Geraden liegen (9), so sind auch die beiden Punkte, in denen eine beliebige durch das Centrum geführte Gerade zwei conjugirte Ebenen trifft, zwei conjugirte Punkte.

Speziell nennt man die beiden Punkte, in denen zwei conjugirte Ebenen die Axe schneiden, conjugirte Brennpunkte.

Liegt von zwei conjugirten Ebenen eine unendlich weit, so nennt man die andere Brennebene. Es gibt zwei solche Brennebenen; Einfallsgeraden, die durch einen Punkt einer dieser Brennebenen gehen, entsprechen Austrittsgerade, die untereinander parallel sind; und parallelen Eintrittsgeraden entsprechen Austrittsgerade, die sich in einem Punkte der anderen Brennebene schneiden; jene heisst die erste, diese die zweite Brennebene.

Die Schnittpunkte der Brennebenen mit der Axe nennt man Haupt-Brennpunkte oder Brennpunkte schlechtweg und man

nennt diese Brennpunkte den ersten und zweiten, wie die Brennebenen, zu denen sie gehören. Alle Einfallsgeraden, die durch den ersten Brennpunkt gehen, liefern Austrittgerade, die parallel der Axe verlaufen, und allen Einfallsgeraden parallel der Axe entsprechen Austrittsgerade, die durch den zweiten Brennpunkt hindurchgehen.

18. Die Entfernungen der Hauptbrennpunkte vom Scheitel der Trennungsfläche heissen die Hauptbrennweiten oder einfach die Brennweiten. Ihre Werthe erhält man aus (I) wenn man darin einmal $x' = \infty$, dann $x = \infty$ setzt; bezeichnet man dieselben mit f und f', so hat man auf diese Weise

$$f = -\frac{nr}{n'-n}, \quad f' = \frac{n'r}{n'-n}. \qquad \text{(IV)}$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass die beiden Brennweiten immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, dass also die Hauptbrennpunkte sich immer auf entgegengesetzten Seiten vom Scheitel befinden, der eine im ersten Mittel, der andere im zweiten liegt.

Wenn $n'-n$ und r gleiches Vorzeichen haben, wenn also der Mittelpunkt der Trennungsfläche in dem stärker brechenden Medium gelegen ist, so wird die erste Brennweite f negativ, die zweite f' positiv; der erste Brennpunkt liegt also im ersten Medium, der zweite im zweiten. In diesem Falle wird ein einfallendes Parallelstrahlenbündel durch Brechung in ein convergentes verwandelt und man nennt daher auch das System der beiden brechenden Medien ein convergentes System.

Wenn hingegen $n'-n$ und r entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn also der Mittelpunkt der brechenden Fläche in das weniger brechende Medium fällt, so wird f positiv und f' negativ. Ein einfallendes Parallelstrahlenbündel verwandelt sich dann in ein divergent austretendes Bündel, und das System heisst dem entsprechend ein divergentes.

19. Vermöge der Gleichungen (IV) ist

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}, \qquad f + f' = r;$$

also

1. Der Absolutwerth der ersten Brennweite verhält sich zu dem der zweiten wie der Brechungsindex des ersten Mittels zu dem des zweiten.

2. Der Halbirungspunkt des Krümmungsradius liegt in der Mitte zwischen den beiden Hauptbrennpunkten, was soviel sagt, als dass die Entfernung zwischen dem Centrum und dem zweiten Brennpunkte dem Absolutwerthe nach gleich ist der Entfernung zwischen dem ersten Brennpunkte und dem Scheitelpunkt.

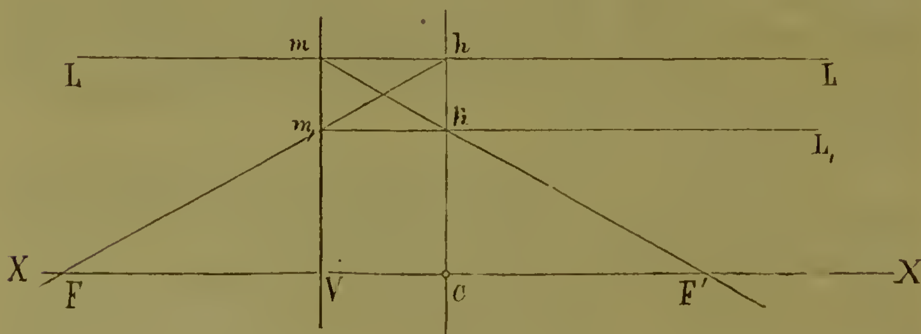
20. Man kann die Brennpunkte durch Construction finden, indem man die Regel (4) anwendet einmal auf eine zur Axe parallele Austrittsgerade, das anderemal auf eine zur Axe parallele Einfallsgerade.

Zu diesem Zwecke ziehe man (Fig. 6) irgend eine Gerade LL parallel zur Axe und betrachte dieselbe als Einfallsgerade; macht man

$$Ck = \frac{n}{n'}\, Ch$$

und zieht mk, so hat man die entsprechende Austrittsgerade, welche die Axe XX im Punkte F', das ist im zweiten Brennpunkte schneidet.

Fig. 6.



Zieht man ebenso die Gerade $m_1 k L_1$ parallel zur Axe und betrachtet sie als Austrittsgerade, macht man

$$Ch = \frac{n'}{n}\, Ck$$

und zieht hm_1; dann ist der Punkt F, in welchem diese Gerade die Axe schneidet, der erste Brennpunkt. Die Construction der beiden Brennpunkte reducirt sich also darauf, auf Ch ein beliebiges Stück Ch abzutragen, sodann

$$Ck = \frac{n}{n'} Ch$$

und $Vm = Ch_1$, $Vm_1 = Ck$ zu machen und die Geraden mkF' und hm_1F zu ziehen.

Aus dieser Construction ergeben sich unmittelbar die Gleichungen (IV), sowie auch die beiden anderen

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}, \qquad f + f' = r.$$

21. Führt man die Brennweiten f und f' in die Gleichungen (I), (II) und (III) ein, so kann man diesen andere Formen geben, die sich als sehr nützlich erweisen.

Indem man die Gleichung (I) durch $\frac{n'-n}{r}$ dividirt, wird sie

$$\frac{1}{x'} \frac{n'r}{n'-n} - \frac{1}{x} \frac{nr}{n'-n} = 1,$$

oder wegen (IV)

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1. \tag{I'}$$

Die Gleichung (II) kann man in Folge (IV) in zweierlei Weise schreiben

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{y}{y'} &= 1 - \frac{x}{f}, \\ \frac{y'}{y} &= 1 - \frac{x'}{f'}; \end{aligned} \right. \tag{II'}$$

und jede dieser Formeln gibt mit Rücksicht auf (I')

$$f \frac{y}{x} + f' \frac{y'}{x'} = 0. \tag{II''}$$

Die Gleichung (III) kann wegen (II') so geschrieben werden

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n} \left(1 - \frac{x'}{f'}\right), \tag{III'}$$

oder auch, wegen (19)

$$f' = -\frac{n'}{n} f,$$

wie folgt:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{x'-f'}{f}, \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{x-f}{f'}. \qquad \text{(III'')}$$

Endlich geben die Gleichungen (II') oder (III'') mit einander multiplizirt die bemerkenswerthe Formel

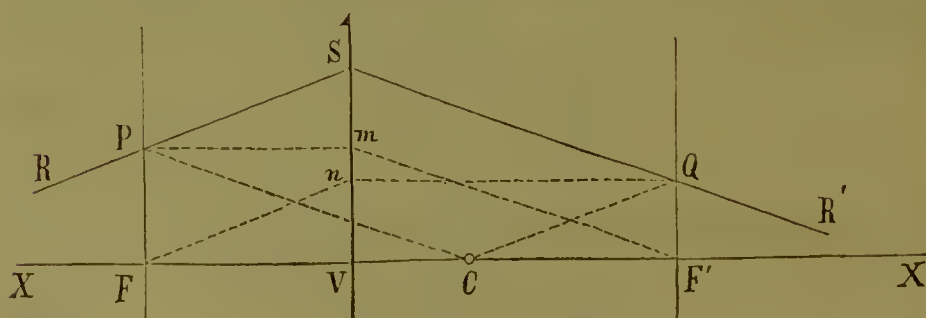
$$(x-f)(x'-f') = ff'. \qquad \text{(V)}$$

22. Die Kenntniss der beiden Brennweiten genügt zur Bestimmung eines Systems von zwei brechenden Medien und die vorhergehenden Formeln gestatten alle auf ein derartiges System bezügliche Aufgaben mit Hilfe dieser beiden Daten allein zu lösen. Wir werden nun zeigen, wie sich diese Aufgaben mit Hilfe derselben gegebenen Grössen auf graphischem Wege auflösen lassen.

Es ist klar, dass alle Probleme auf die folgenden zurückgeführt werden können.

Aufgabe 1. Es sind die beiden Brennpunkte eines Systems zweier Medien gegeben und eine Einfallsgerade; die entsprechende Austrittsgerade soll gefunden werden.

Fig. 7.



Es seien (Fig. 7) F, F' die Brennpunkte, V der Scheitel, C der Mittelpunkt der Trennungsfläche und es sei RS die gegebene Einfallsgerade. Die gesuchte Austrittsgerade wird ebenfalls durch S gehen;

um sie vollständig zu bestimmen, können wir auf verschiedene Weise verfahren.

1. Durch den Punkt *P*, in welchem *RS* die erste Brennebene schneidet, ziehe man *Pm* parallel zur Axe; die dieser Geraden entsprechende Austrittsgerade wird zur gesuchten parallel sein (17); sie geht aber durch *F'* (17), ist also die Gerade *mF'*, demnach ist die gesuchte Gerade die durch *S* parallel zu *mF'* gezogene Gerade *SR'*.

2. Der Geraden *Fn*, parallel zu *RS* gezogen, entspricht eine Austrittsgerade, welche die zweite Brennebene in demselben Punkt schneidet, durch welchen auch die gesuchte Gerade hindurchgeht. Aber der zu *Fn* gehörige austretende Strahl *nQ* ist, weil *Fn* durch den ersten Brennpunkt geht, parallel zur Axe (17), also ist *SQ* die gesuchte Gerade.

3. Die gesuchte Austrittsgerade muss parallel sein zu jenem Strahl, welcher dem einfallenden Strahl *PC* entspricht. Aber der Strahl *PC* wird nicht abgelenkt (5), also ist *SR'*, parallel zu *PC* gezogen, die gesuchte Gerade.

4. Die Austrittsgerade, die einer Parallelen zu *RS* durch *C* entspricht, muss die gesuchte Gerade in einem Punkte der zweiten Brennebene schneiden. Aber ein Strahl in der angegebenen Lage wird nicht abgelenkt; zieht man also *CQ* parallel zu *RS* und verbindet den Schnittpunkt dieser Geraden mit der zweiten Brennebene *Q* mit *S*, so ist *SQ* die gesuchte Gerade.

Es mag bemerkt werden, dass die Figur *PSQC* ein Parallelogramm ist.

Aufgabe 2. Den conjugirten Punkt zu finden, der einem gegebenen Punkte entspricht.

Es sei wieder (Fig. 8ª und 8ᵇ) *V* der Scheitel und *C* der Mittelpunkt der Trennungsfläche, *F* der erste und *F'* der zweite Brennpunkt, *A* der gegebene Punkt. Durch *A* ziehe man zwei Einfallsgerade *Am*, *An*, die erstere parallel zur Axe, die andere durch den ersten Brennpunkt *F*. Die entsprechenden Austrittsgeraden werden sein, *mF'*, hindurchgehend durch *F'* und *nB*, parallel der Axe gelegen (17). Ihr Durchschnittspunkt *B* ist der zu *A* conjugirte Punkt. Wenn genau construirt wurde, muss *AB* die Axe im Centrum *C* schneiden (8).

Es ist zu bemerken, dass aus dieser Construction unmittelbar die früher gefundenen Gleichungen (I′) und (II′) hervorgehen. In der That folgt aus den beiden Dreiecken *Amn*, *FVn* (Fig. 8[a])

$$\frac{FV}{Am} = \frac{nV}{nm}$$

oder

$$\frac{FV}{Am} = \frac{nV}{nV + Vm},$$

und daher weil $FV = -f$, $Am = -x$, $nV = -y'$, $Vm = y$,

$$\frac{f}{x} = \frac{y'}{y' - y}. \tag{1}$$

Auf ähnliche Weise erhält man aus den Dreiecken *Bnm*, *F′Vm*:

$$\frac{f'}{x'} = \frac{y}{y - y'}. \tag{2}$$

Fig. 8[a].

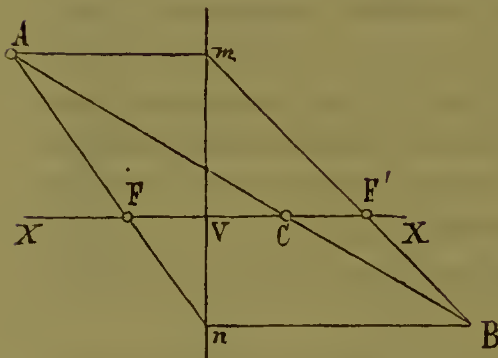
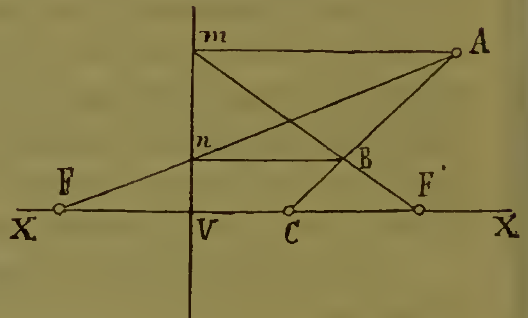


Fig. 8[b].



Addirt man diese beiden Gleichungen, so gibt diess

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1,$$

und wenn man (1) mit y und (2) mit y' multiplizirt und sodann addirt, erhält man die weitere Gleichung:

$$f\frac{y}{x} + f'\frac{y'}{x'} = 0.$$

23. Sind zwei conjugirte Ebenen gegeben und auf einer von ihnen irgend eine aus Punkten zusammengesetzte Figur, so werden

die ihnen conjugirten Punkte auf der anderen Ebene eine andere Figur bilden. Ein Auge, welches die Strahlen empfängt, welche von den Punkten der ersten Figur ausgegangen, die Trennungsfläche durchsetzt haben, empfängt sie in Richtungen, die sie hätten, wenn sie direct von den Punkten der zweiten Figur ausgegangen wären; der Eindruck, den das Auge haben wird, ist demnach derselbe, den es hätte wenn die Punkte der zweiten Figur direct das Licht aussendeten. Desshalb nennt man auch diese zweite Figur das Bild der ersten. Da nun ebenso, wenn das Licht in entgegengesetzter Richtung das System durchdringen und vom zweiten Mittel in das erste sich fortpflanzen würde, den einfallenden Strahlen, die durch einen Punkt der zweiten Figur gehen, austretende zukämen, die sich in dem entsprechenden Punkte der ersten Figur durchschneiden, so kann man diese das Bild der anderen nennen. Aus diesem Grunde nennt man auch die beiden Figuren conjugirte Bilder.

Das erste der betrachteten Bilder nennt man reell und virtuell, je nachdem es im ersten oder im zweiten Medium gelegen ist; das zweite hingegen heisst reell wenn es im zweiten, virtuell wenn es im ersten Medium liegt.

Zwei correspondirende Punkte zweier conjugirter Bilder liegen immer auf einer Geraden, die durch das Centrum geht (8); daher sind zwei conjugirte Bilder immer perspectivisch.

Wenn eine der beiden conjugirten Ebenen im Unendlichen liegt, so sagt dieser Satz, dass die Gerade, welche einen beliebigen Punkt der ersten Brennebene mit dem Centrum verbindet, parallel ist zu den austretenden Strahlen, die den aus diesem Punkte einfallenden Strahlen entsprechen, und dass in ähnlicher Weise die Gerade, welche das Centrum mit irgend einem Punkte der zweiten Brennebene verbindet, die Richtung jener Einfallsgeraden hat, die nach der Brechung in dem genannten Punkte sich vereinigen.

Die Richtigkeit dieser Bemerkungen ergibt sich aus den in (8) und (9) angestellten Betrachtungen. Es genügt die Ueberlegung, dass die durch das Centrum gehende Gerade angesehen werden kann als zugehörig dem Bündel der parallelen Einfalls- oder Austrittsgeraden und dass ein in ihr liegender Einfallsstrahl nicht abgelenkt wird (5).

24. Wenn die Trennungsfläche eben ist, wird $r = \infty$ und die Formeln (IV) geben $f = f' = \infty$. Einem Parallelbündel von Einfallsgeraden entspricht dann wieder ein Bündel von untereinander parallelen Austrittsgeraden, wie ja auch aus anderweitigen Betrachtungen hervorgeht.

In diesem Falle verlieren die Gleichungen (I'), (II') und (V) ihre Bedeutung; die Gleichungen (I), (II) und (III) geben aber

$$\frac{x}{x'} = \frac{n}{n'}, \qquad \frac{y}{y'} = 1, \qquad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n},$$

sie sagen also:

1. Dass die Entfernungen x und x' immer gleiches Vorzeichen haben und proportional sind den Brechungsindices des ersten und zweiten Mediums.

2. Dass zwei conjugirte Bilder immer gleiche Grösse haben.

3. Dass das Verhältniss der Winkel zweier einfallender Strahlen zu dem Winkel der ihnen entsprechenden austretenden Strahlen constant ist und gleich dem Verhältniss des Brechungsindex des zweiten Mediums zu dem des ersten.

ZWEITES KAPITEL.

Systeme von mehr als zwei Medien.

§. 1. *Existenz und Eigenschaften der Fundamentalpunkte.*

25. Nach den vorhergegangenen Betrachtungen, die sich auf den einfachen Fall eines Systems bezogen, das nur aus zwei durch eine einzige Fläche von einander getrennten Medien besteht, können wir jetzt übergehen zu dem allgemeineren Fall eines beliebigen Systems, wie es im Art. 1 des Näheren angegeben wurde. Wie dort, werden wir mit $M, M_1, M_2 \ldots M'$ die aufeinander folgenden Medien und mit $n, n_1, n_2 \ldots n'$ ihre absoluten Brechungsindices bezeichnen.

Ist ein derartiges System gegeben und im ersten Medium M ein einfallender Centralstrahl, so können wir die Lagen der entsprechenden gebrochenen Strahlen in den Medien M_1, M_2 ... M' bestimmen, indem wir auf die successiven Brechungen die Regel (4) anwenden. Für jede dieser Brechungen gilt die Bemerkung (6) und führt sofort zu folgendem ersten

Satz: Wenn eine Einfallsgerade mit der Axe des dioptrischen Systems in derselben Ebene liegt, so liegt in dieser Ebene auch die entsprechende Austrittsgerade.

26. Ist ein Bündel von Einfallsgeraden gegeben, die alle durch denselben Punkt A gehen, so werden in Folge des Satzes (8) auch die gebrochenen Strahlen im Medium M_1 alle in einem Punkte B_1 sich schneiden, der bezüglich des Systems der ersten beiden Medien zu A conjugirt ist. Wegen desselben Satzes wird diesem zweiten Bündel ein drittes Bündel von gebrochenen Strahlen im Medium M_2 entsprechen, die alle durch den Punkt B_2 gehen, und dieser Punkt ist conjugirt zu B_1 bezüglich der beiden Medien M_1 und M_2. Das dritte Bündel wird ebenso ein viertes erzeugen, dessen Strahlen in einem weiteren Punkte B_3 zusammentreffen nnd indem man in dieser Weise fortschreitet bis zum letzten Medium, ergibt sich sofort der weitere

Satz: In irgend einem centrirten dioptrischen System entspricht einem beliebigen Bündel von Einfallsgeraden, die sich in demselben Punkte A schneiden, ein Bündel von Austrittsgeraden, die ebenfalls alle durch einen und denselben Punkt B gehen.

Wenn sich das Licht in entgegengesetztem Sinne vom letzten Medium zum ersten fortpflanzen würde, entspräche einem Bündel von Einfallsgeraden, die durch B gehen, ein Bündel von Austrittsgeraden, die sich alle in A schneiden.

Zwei Punkte, die in einer derartigen Beziehung wie A und B stehen, dass nämlich allen einfallenden Strahlen, die durch einen Punkt gehen, austretende Strahlen entsprechen, die sich im anderen Punkte schneiden, heissen conjugirte Punkte.

Aus dem Satze (8) folgt noch weiter, dass der Punkt B_1 in der

durch A und durch die Axe des Systems bestimmten Ebene (9), ebenso B_2 in der durch B_1 und durch die Axe geführten Ebene liegt u. s. f. Hieraus ergibt sich aber:

Zwei conjugirte Punkte liegen immer in derselben durch die Axe des Systems geführten Ebene.

27. Nachdem so die Existenz conjugirter Punkte dargethan ist und wir überdiess wissen, dass sie immer mit der Axe des Systems in derselben Ebene liegen, können wir, wie schon im Art. 10 für eine einzige Trennungsfläche geschehen, unsere weiteren Betrachtungen nöthigenfalls auf eine derartige Ebene beschränken, ohne irgend Etwas an Allgemeinheit und Strenge einzubüssen.

28. Wenn man durch den Punkt A eine Ebene senkrecht zur Axe legt, so werden alle Punkte dieser Ebene ihre bezüglich der ersten Trennungsfläche conjugirten Punkte in einer Ebene haben, die durch B_1 geht und senkrecht zur Axe ist (14). Ebenso haben alle Punkte dieser zweiten Ebene ihre bezüglich der zweiten Brechung conjugirten Punkte in der durch B_2 senkrecht zur Axe geführten Ebene, u. s. f. Demnach gilt auch für das gesammte System der brechenden Medien der

Satz: Alle Punkte A einer zur Axe senkrechten Ebene haben ihre conjugirten Punkte B in einer anderen zur Axe senkrechten Ebene.

Zwei zur Axe senkrechte Ebenen von der Beschaffenheit, dass jedem Punkte der einen ein Punkt der anderen conjugirt ist, heissen conjugirte Ebenen.

Es gibt immer zu irgend einer zur Axe senkrechten Ebene eine entsprechende conjugirte Ebene.

Da, wie sofort einleuchtet, ein in der Axe einfallender Strahl keine Richtungsänderung erleidet, so sind die beiden Punkte, in welchen zwei conjugirte Ebenen die Axe schneiden, conjugirt zu einander. Zwei derartige Punkte heissen conjugirte Brennpunkte.

29. Wenn von zwei conjugirten Ebenen die eine unendlich weit liegt, so nennt man die andere Brennebene. Ist die im Unendlichen gelegene Ebene jene, in deren Punkten die Austrittsgeraden zusammenlaufen, so heisst die ihr entsprechende conjugirte Ebene

die erste Brennebene; liegt aber von den beiden conjugirten Ebenen jene im Unendlichen, durch deren Punkte die Einfallsgeraden gehen, so heisst die andere Ebene die zweite Brennebene. Irgend einem Bündel paralleler einfallender Strahlen entspricht ein Bündel von Austrittsgeraden, die sämmtlich durch einen Punkt der zweiten Brennebene gehen; einem Bündel von Einfallsgeraden, die sich in einem Punkte der ersten Brennebene schneiden, entspricht umgekehrt ein Bündel paralleler Austrittsgeraden.

Die Schnittpunkte der Brennebenen mit der Axe heissen die Hauptbrennpunkte oder einfach die Brennpunkte des Systems und zwar ist der erste Brennpunkt der auf der ersten, der zweite Brennpunkt der auf der zweiten Brennebene gelegene Punkt. Allen Einfallsgeraden, die durch den ersten Brennpunkt gehen, entsprechen Austrittsgerade, die der Axe parallel laufen, und Strahlen, die parallel der Axe einfallen, geben austretende Strahlen, die sich im zweiten Brennpunkte schneiden.

30. Es sei auf einer zur Axe senkrechten Ebene eine Figur gegeben. Jedem Punkte derselben wird ein Punkt conjugirt sein, welcher auf der zur gegebenen Ebene conjugirten Ebene liegt und die Gesammtheit dieser conjugirten Punkte wird eine neue Figur bilden, welche man das Bild der ersten bezüglich des dioptrischen Systems nennt. Da nun umgekehrt, wenn das Licht in entgegengesetztem Sinne wie früher durch das System sich fortpflanzte, die erste Figur das Bild der zweiten wäre, so nennt man auch die beiden Figuren conjugirte Bilder.

Das erste heisst reell oder virtuell, je nachdem es im ersten Medium liegt oder nicht; das zweite heisst reell oder virtuell, je nachdem es im zweiten oder im ersten Medium gelegen ist.

31. Wir betrachten wieder, wie im Art. 26, einen Punkt A und die Reihe $B_1\, B_2 \ldots B$ der ihm bezüglich der ersten zwei Medien, der ersten drei Medien u. s. f. und bezüglich des ganzen Systems conjugirten Punkte.

In Folge des Satzes (15) ist das Verhältniss der Abstände von A und B_1 von der Axe unabhängig von der absoluten Grösse dieser Abstände und nur abhängig von der Lage der beiden zur Axe senkrechten Ebenen, in welchen diese Punkte liegen. Gleiches gilt für

die Punkte B_1 und B_2, B_2 und B_3 u. s. f. und für die Punkte B_i und B. Daher ist auch das Verhältniss des Abstandes von A und des ihm bezüglich des ganzen Systems conjugirten Punktes B von der Axe nur abhängig von der Lage der beiden conjugirten Ebenen, in denen die Punkte A und B liegen, oder anders ausgedrückt:

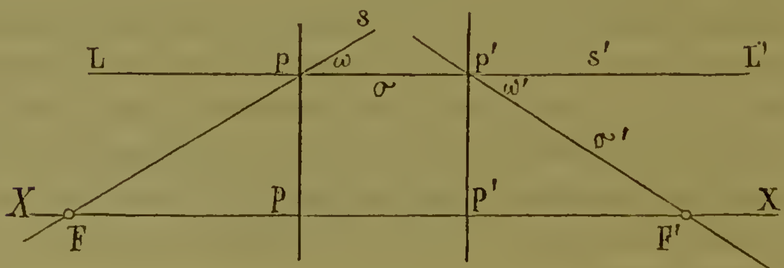
Wie man auch in zwei gegebenen conjugirten Ebenen das Paar conjugirter Punkte wählen mag, das Verhältniss ihrer Entfernungen von der Axe bleibt immer dasselbe.

Sind daher zwei conjugirte Ebenen gegeben und in einer von ihnen irgend welche Punkte, so werden alle Geraden, welche diese Punkte mit ihren conjugirten Punkten in der anderen Ebene verbinden, die Axe in einem und demselben Punkte schneiden.

Auf die Punkte zweier conjugirter Bilder angewendet, kann dieser Satz auch dahin ausgesprochen werden, *dass zwei conjugirte Bilder immer perspectivisch sind bezüglich eines auf der Axe gelegenen Punktes.*

32. Es gibt im Allgemeinen zwei conjugirte Ebenen, für welche das soeben betrachtete Verhältniss der Entfernungen zweier conjugirter Punkte von der Axe gleich Eins ist; also zwei derartige Ebenen, dass zwei conjugirte Punkte derselben auf einer zur Axe parallelen Geraden liegen.

Fig. 9.



Um dieses zu beweisen, sei (Fig. 9) XX die Axe und F, F' seien die Brennpunkte des gegebenen dioptrischen Systems. In irgend einer durch die Axe gelegten Ebene, die zugleich die Ebene der Figur sei, denken wir uns irgend eine zur Axe parallele Gerade LL'

gezogen. Wenn eine Einfallsgerade σ mit dieser Geraden LL' zusammenfällt, so geht die ihr entsprechende Austrittsgerade σ' durch den zweiten Brennpunkt F'; diese aber liegt in der Ebene $FF'LL'$ (25) und schneidet daher LL' in einem Punkte, den wir p' nennen wollen. In ähnlicher Weise wird einer Austrittsgeraden s', die mit LL' zusammenfällt, eine Eintrittsgerade s entsprechen, die durch den ersten Brennpunkt F geht und, da sie in der Ebene der Figur liegt, die Gerade LL' in einem Punkte, etwa p, schneiden wird.

Durch p' gehen demnach zwei Austrittsgerade σ', s', die den Einfallsgeraden σ, s entsprechen, welche in p sich schneiden. Aber allen Einfallsgeraden, die durch einen Punkt gehen, entsprechen Austrittsgerade, die wieder durch einen anderen Punkt hindurchgehen (26), daher werden auch allen Einfallsgeraden, die sich in p schneiden, Austrittsgerade entsprechen, die durch p' gehen, d. h. die beiden Punkte p und p' sind conjugirt.

Die beiden durch p, p' senkrecht zur Axe geführten Ebenen $pP, p'P'$ sind also auch conjugirt und für ein Paar conjugirter Punkte derselben p, p' ist das Verhältniss der Distanzen pP, $p'P'$ gleich Eins. Aber wir wissen (31), dass dieses Verhältniss dasselbe bleibt für irgend ein anderes Paar conjugirter Punkte, die in denselben Ebenen liegen; somit haben die beiden Ebenen pP, $p'P'$ die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass irgend eine zur Axe parallele Gerade dieselben in zwei zueinander conjugirten Punkten schneidet.

Die beiden Ebenen, welchen diese Eigenschaft zukommt, nennt man man nach Gauss die Hauptebenen des dioptrischen Systems.

Aus der vorhergehenden Ableitung ist zu ersehen, dass Hauptebenen vorhanden sind wenn die Brennpunkte existiren; wir werden am geeigneten Orte die speziellen Fälle betrachten, in denen die letzteren nicht existiren (46).

Die beiden Punkte P und P', in denen die Hauptebenen die Axe schneiden, heissen Hauptpunkte. Die Abschnitte auf der Axe PF und $P'F'$, die enthalten sind zwischen dem ersten Hauptund dem ersten Brennpunkte einerseits, dem zweiten Hauptpunkte und dem zweiten Brennpunkte andererseits, nennt man die Hauptbrennweiten oder schlechtweg die Brennweiten des Systems.

Wir werden die beiden Brennweiten des Systems mit f und f' bezeichnen und setzen fest, dass eine Brennweite als positiv anzusehen sei, wenn der Brennpunkt dem Hauptpunkte im Sinne der Lichtfortpflanzung voraus liegt, als negativ hingegen im entgegengesetzten Falle. Wenn, wie gewöhnlich, vorausgesetzt wird, dass das Licht sich von der Linken zur Rechten fortpflanze, ist in Fig. 9 f negativ, und f' positiv. Wir werden bald zeigen (34), dass f und f' immer wie in dieser Figur, entgegengesetztes Vorzeichen haben.

33. Nebst der Reihe der Punkte $A, B_1, B_2 \ldots B$, die wir im Art. 26 und 31 betrachtet haben, fassen wir jetzt noch zwei Einfallsgerade s und σ ins Auge, die durch den Punkt A gehen, sowie die entsprechenden gebrochenen Strahlen in den Medien $M_1, M_2 \ldots M'$, die wir mit s_1 und σ_1, s_2 und $\sigma_2 \ldots s'$ und σ' bezeichnen. Wir nennen ω den Winkel $sA\sigma$, welchen die beiden Geraden s und σ einschliessen, ω_1 den Winkel zwischen den Geraden s_1 und σ_1, ω_2, den Winkel der Geraden s_2 und $\sigma_2 \ldots \omega'$ den Winkel $s'B\sigma'$ der beiden Austrittsgeraden s' und σ', indem wir die im Artikel 13 bezüglich der Vorzeichen dieser Winkel gemachten Festsetzungen beachten.

Die Formel (III) im Artikel 13 gibt, indem man sie der Reihe nach auf die erste Brechung, dann auf die zweite, die dritte u. s. w. anwendet:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{y_1}{y}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{y_2}{y_1}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{n_3}{n_2} \cdot \frac{y_3}{y_2} \ldots \frac{\omega_2}{\omega'} = \frac{n'}{n_i} \cdot \frac{y'}{y_i},$$

und wenn man die Gleichungen miteinander multiplizirt, erhält man

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{y'}{y}. \tag{III}$$

Diese Beziehung ist identisch mit (III) im Artikel 13, bezüglich eines Systems von nur zwei brechenden Medien, und der für zwei Medien in (16) ausgesprochene Satz gilt daher auch für ein beliebiges System. In jedem Falle also ist das Verhältniss des Winkels irgend zweier Einfallsgeraden, die sich in A schneiden, zu dem Winkel der entsprechenden Austrittsgeraden, die durch B, dem zu A conjugirten Punkte

gehen, unabhängig von der Lage der beiden Punkte A und B in den zwei conjugirten Ebenen und ist nur abhängig von der Lage dieser beiden Ebenen. Bezeichnen y und y' die Entfernungen der Punkte A und B von der Axe, so ist der Werth dieses constanten Verhältnisses $\frac{n'}{n} \cdot \frac{y'}{y}$.

34. Aus diesem Satze lassen sich zwei sehr wichtige Folgerungen ziehen.

Wenden wir ihn zuerst an auf die Einfallsgeraden s, σ und die ihnen entsprechenden Austrittsgeraden s', σ', die wir in (32) Fig. 9 betrachtet haben. In diesem Falle ist $y = Pp = P'p' = y'$ und die Gleichung (III) gibt:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\widehat{sp\sigma}}{\widehat{s'p'\sigma'}} = \frac{n'}{n}.$$

Hieraus folgt:

1. Dass ω und ω' gleiches Vorzeichen haben, wesshalb, wie ersichtlich, PF und $P'F'$ nothwendigerweise mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind.

2. Es ist der Winkel $sp\sigma = pPF$ und der Winkel $s'p'\sigma' = p'F'P'$; wegen der Kleinheit der Winkel kann man dieselben mit ihren Tangenten vertauschen, sodass man haben wird:

$$\frac{\operatorname{tng} pFP}{\operatorname{tng} p'F'P'} = \frac{n'}{n}.$$

Aus den Dreiecken FPp, $F'P'p'$ folgt weiter

$$\operatorname{tng} pFP = \frac{pP}{FP}, \quad \operatorname{tng} p'F'P' = \frac{p'P'}{P'F'} = \frac{pP}{P'F'},$$

sodass auch

$$\frac{P'F'}{FP} = \frac{n'}{n}$$

wird. Da nun $P'F' = f'$ und $FP = -f$ ist, so erhält man

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}. \qquad (1)$$

Hiermit ergibt sich der folgende

Satz: 1. Die beiden Brennweiten eines beliebigen dioptrischen Systems haben immer entgegengesetztes Vorzeichen; 2. der absolute Werth der ersten Brennweite verhält sich zu dem der zweiten wie der Brechungsindex des ersten Mediums zu dem des letzten.

Wenn die beiden äussersten Medien gleiche Brechungsindices haben, oder noch spezieller, wenn die beiden äussersten Medien durch dieselbe Substanz gebildet werden, reducirt sich die Gleichung (1) auf:

$$f = -f' \tag{2}$$

und der vorhergehende Satz sagt, dass die beiden Brennweiten gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

Dieses Resultat lässt sich auch so aussprechen, dass, wenn das erste und das letzte Medium eines dioptrischen Systems gleiche Brechungsindices haben, die beiden Hauptpunkte symmetrisch bezüglich der beiden Brennpunkte liegen.

Für die gewöhnlichen dioptrischen Instrumente, bei denen das erste und das letzte Medium die Luft ist, tritt dieser Fall ein.

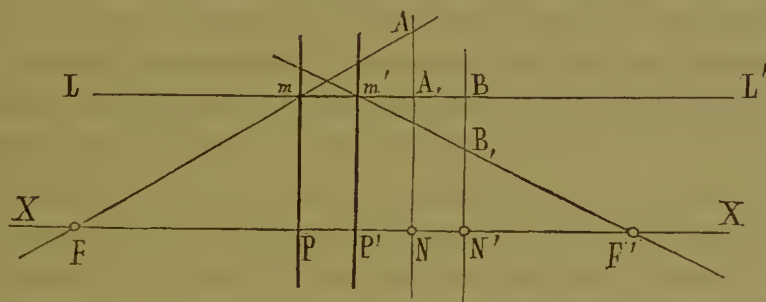
Wenn f negativ und f' positiv ist, so entsteht aus einem einfallenden Parallelstrahlenbündel ein convergentes austretendes Strahlenbündel, nach welcher Seite hin sich auch das Licht fortpflanzen mag; das dioptrische System heisst dann in diesem Falle ein convergentes. Wenn hingegen f positiv und f' negativ ist, so wird aus einem einfallenden Parallelstrahlenbündel ein divergentes austretendes Bündel und das dioptrische System heisst ein divergentes.

35. Um die zweite Folgerung aus der Gleichung (III) abzuleiten, nehmen wir an, es seien (Fig. 10) F, F' die Brennpunkte und P, P' die Hauptpunkte des Systems. Wir ziehen ferner, wie in Fig. 9, eine Gerade LL' parallel zur Axe und die Geraden FmA, $m'B_1F'$, die der ersteren Geraden entsprechen, je nachdem man sie als Austritts- oder als Eintrittsgerade betrachtet, und nehmen überdiess zwei beliebige conjugirte Ebenen an, NA und $N'B$. Der Schnittpunkt B der Ebene $N'B$ und der Austrittsgeraden $m'L'$, die der Einfalls-

geraden FmA entsprechen, ist conjugirt zu A und für die beiden jugirten Ebenen NA, $N'B$ ist

$$\frac{y'}{y} = \frac{N'B}{NA} = \frac{Pm}{NA}.$$

Fig. 10.



In ähnlicher Weise sind auch die Schnittpunkte $A_1 B_1$ der conjugirten Ebenen mit den sich entsprechenden Geraden LL', $m'F'$ zueinander conjugirt und desshalb ist auch

$$\frac{y'}{y} = \frac{N'B_1}{NA_1} = \frac{N'B_1}{P'm'}.$$

Für die beiden betrachteten conjugirten Ebenen wird also in Folge (III)

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{Pm}{NA} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{N'B_1}{P'm'}. \tag{1}$$

Nun kann man die Ebene NA so wählen, dass

$$\frac{NA}{Pm} = \frac{n'}{n} \tag{2}$$

wird, in welchem Falle dann auch wegen (1)

$$\frac{P'm'}{N'B_1} = \frac{n'}{n} \tag{3}$$

sein wird, und ferner

$$\frac{\omega}{\omega'} = 1 \text{ oder } \omega = \omega'.$$

Es gibt also zwei conjugirte Ebenen, welche die Eigenschaft haben, dass Austrittsgerade, die sich in

irgend einem Punkte der einen von diesen Ebenen schneiden, den gleichen Winkel einschliessen wie die ihnen entsprechenden Einfallsgeraden, die durch den conjugirten Punkt, gelegen auf der anderen Ebene, hindurchgehen.

Diese Ebenen nennt man die Knotenebenen.

Die Punkte N, N', in denen die Knotenebenen die Axe schneiden, nennt man die Knotenpunkte oder einfach die Knoten. Da einer Einfallsgeraden, die mit der Axe coincidirt als Austrittsgerade wieder die Axe entspricht, so folgt aus der characteristischen Eigenschaft der Knotenebenen, dass jeder Einfallsgeraden, die durch den ersten Knotenpunkt geht, eine Austrittsgerade durch den zweiten Knotenpunkt entspricht, die zur ersteren parallel ist.

Zur Bestimmung der Knotenpunkte N und N' dienen die Gleichungen (2) und (3). Aus den beiden Paaren ähnlicher Dreiecke FNA, FPm und $F'N'B'$, $F'P'm'$ folgt nämlich

$$FN = FP.\frac{NA}{Pm}, \qquad F'N' = F'P'\frac{N'B_1}{P'm'}.$$

und daher mit Hilfe von (2) und (3)

$$FN = FP.\frac{n'}{n}, \qquad F'N' = F'P'.\frac{n}{n'}.$$

Es ist aber $FP = -f$, $F'P' = -f'$, und in Folge der Gleichung (1) im Artikel 34

$$-f\frac{n'}{n} = f', \qquad -f'\frac{n}{n'} = f;$$

daher wird schliesslich

$$FN = f', \qquad F'N' = f.$$

Man findet also den ersten Knotenpunkt, wenn man vom ersten Brennpunkte aus auf der Axe eine Strecke abträgt, die der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich ist der zweiten Brennweite und den zweiten Knoten-

punkt erhält man, indem man vom zweiten Brennpunkte aus die erste Brennweite ihrer Grösse und Richtung nach abträgt.

Da die beiden Brennweiten, wie gezeigt wurde, immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, so können wir auch sagen, dass bezüglich der beiden Brennpunkte, der erste Knotenpunkt symmetrisch zum zweiten Hauptpunkte und der zweite Knotenpunkt symmetrisch zum ersten Hauptpunkte gelegen ist; oder auch, dass der Mittelpunkt der Strecke FF', zugleich der Mittelpunkt der Abschnitte PN' und $P'N$ ist.

Hieraus folgt sofort, dass der Abstand NN' der beiden Knotenpunkte gleich ist dem Abstande PP' der beiden Hauptpunkte.

Wenn die beiden äussersten Medien des Systems denselben Brechungsindex haben, oder noch specieller, wenn sie identisch sind, so fallen die durch obige Regel bestimmten Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen.

36. Es ist leicht zu zeigen, dass zwischen den Brennweiten und den Entfernungen der Knoten von den bezüglichen Hauptpunkten dieselben Beziehungen stattfinden, die im Falle einer einzigen brechenden Fläche zwischen den Brennweiten und dem Krümmungsradius derselben bestehen (18).

Nennen wir r die untereinander gleichen Distanzen PN, $P'N'$ (Fig. 10), diese als positiv gerechnet, wenn N und N' bezüglich P und P' im Sinne der Lichtbewegung vorausliegen. Es ist $FN = FP + PN$ und wegen $FN = f'$, $FP = -f$, $PN = r$,

$$f' = r - f, \qquad f = r - f'.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ (34), so erhalten wir

$$f = -\frac{nr}{n'-n}, \qquad f' = \frac{n'r}{n'-n}, \qquad \text{(IV)}$$

zwei Ausdrücke, die identisch sind mit den Ausdrücken (IV) bezüglich eines Systems von nur zwei brechenden Medien (18).

§ 2. *Gebrauch der Fundamentalpunkte, Constructionen und Formeln für ein beliebiges dioptrisches System.*

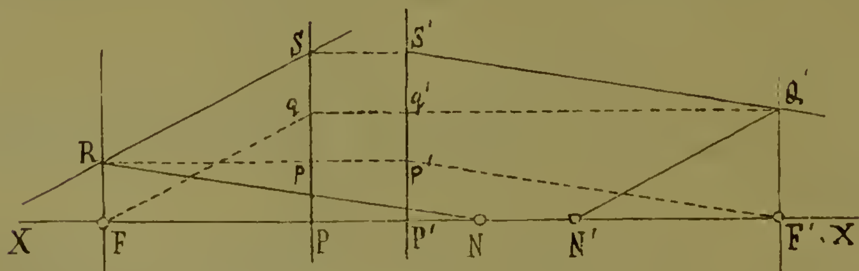
37. Im Vorhergehenden haben wir gezeigt, dass auf der Axe eines centrirten Systems im Allgemeinen sechs bemerkenswerthe Punkte angegeben werden können, zwei Brennpunkte (29), zwei Hauptpunkte (32) und zwei Knotenpunkte (35). Zusammengenommen nennen wir sie die Fundamentalpunkte des Systems. Sind vier dieser Punkte gegeben, so sind die übrigen, wie aus den früheren Betrachtungen (34—35) hervorgeht, ebenfalls bestimmt.

Die Kenntniss dieser Fundamentalpunkte oder auch die Kenntniss von vieren derselben genügt, um die Wirkung eines Systems untersuchen zu können, denn man ist mit deren Hilfe im Stande zu bestimmen: 1. die Austrittsgerade, die einer gegebenen Einfallsgeraden entspricht; 2. den zu einem gegebenen Punkte conjugirten Punkt. Es ist klar, dass alle Aufgaben, die sich bezüglich der Wirkung eines dioptrischen Systems darbieten, auf diese beiden sich zurückführen lassen.

Aufgabe 1. Wenn die Fundamentalpunkte und eine Einfallsgerade gegeben sind, die entsprechende Austrittsgerade zu finden.

Es seien (Fig. 11) F, F', P, P', N, N' die Fundamentalpunkte und RS die gegebene Gerade. Die entsprechende Austrittsgerade muss durch den zu S conjugirten Punkt S' gehen; ihre Richtung kann auf verschiedene Weise erhalten werden.

Fig. 11.



1. Die Gerade RS (Fig. 11) kann betrachtet werden als angehörig einem einfallenden Strahlenbündel, dessen Strahlen durch R

gehen, welchem Strahlenbündel parallel austretende Strahlen entsprechen. Zu diesen Einfallsgeraden gehört aber auch die parallel der Axe verlaufende Rpp', welcher die durch den zweiten Brennpunkt F' gehende Austrittsgerade $p'F'$ entspricht; die gesuchte Gerade $S'Q'$ ist also parallel zu $p'F'$.

2. Man ziehe Fq parallel zu RS, dann muss die entsprechende Austrittsgerade die gesuchte in einem Punkte der zweiten Brennebene schneiden. Weil aber Fq durch den Brennpunkt F geht, so entspricht ihr eine zur Axe parallele Austrittsgerade $qq'Q'$, welche die zweite Brennebene in Q' schneiden mag; $S'Q'$ ist also die gesuchte Gerade.

3. Die gesuchte Gerade muss parallel sein jener Austrittsgeraden, die der Geraden RN (Fig. 11) entspricht; aber nach der Eigenschaft der Knotenpunkte ist diese Austrittsgerade selbst parallel zu RN; somit ist die gesuchte Gerade $S'Q'$ parallel zu RN.

4. Die gesuchte Gerade muss die zweite Brennebene in einem Punkte treffen, durch welchen auch jene Austrittsgerade geht, die der parallel zu RS durch N gezogenen Geraden entspricht. Diese Austrittsgerade $N'Q'$ ist aber parallel zu RS, also ist $S'Q'$ die gesuchte Gerade.

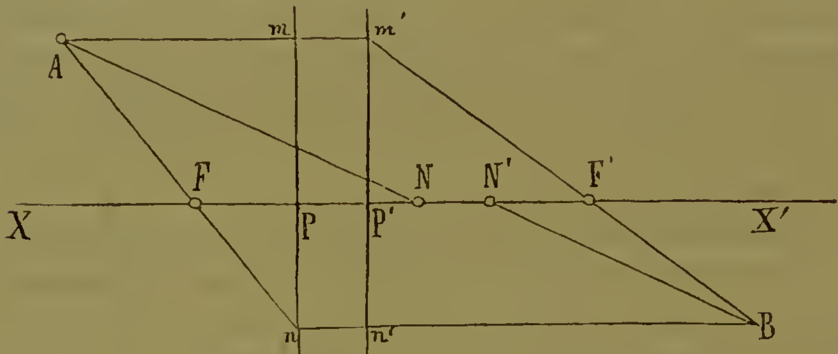
Aufgabe 2. Wenn die Fundamentalpunkte gegeben sind, zu einem Punkte den conjugirten zu finden.

Es seien (Fig. 12) XX die Axe, F, F' die Brennpunkte, P, P' die Haupt- und N, N' die Knotenpunkte, ferner A der gegebene Punkt, zu dem der conjugirte gesucht wird.

Aus den unendlich vielen einfallenden Strahlen, die von A ausgehen, wählen wir zwei Am, An, den ersten parallel der Axe, den anderen durch den Brennpunkt F gehend. Wenn wir ersteren bis zum Durchschnitt m' mit der zweiten Hauptebene verlängern und nn' parallel zur Axe ziehen, so sind m' und n' vermöge der Eigenschaften der Hauptebenen (32) conjugirt zu m und n. Die zu Am gehörige Austrittsgerade geht aber durch m' und die zu An gehörige durch n'. Erstere muss aber auch durch F' gehen und die letztere muss zur Axe parallel sein (29), somit sind diese Austrittsgeraden mit $m'F'$ und $n'B$ parallel zur Axe. Ihr Schnittpunkt B ist der gesuchte zu A conjugirte Punkt.

Die Geraden AN und $N'B$ müssen zu einander parallel sein; die Betrachtung der Einfallsgeraden AN und einer der vorher verwendeten würde demnach mit derselben Einfachheit zur Bestimmung des Punktes B dienen können.

Fig. 12.



38. Die gezeigten Constructionen führen zu sehr einfachen Formeln, welche die Lage des einen von zwei conjugirten Punkten zu berechnen gestatten, wenn die des anderen gegeben ist, und zwar indem man denselben Weg einschlägt, der im Artikel 22 für den speziellen Fall eines Systemes von zwei brechenden Medien befolgt wurde.

Aus dem Dreiecke Amn folgt

$$\frac{FP}{Am} = \frac{nP}{nm}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{FP}{Am} = \frac{nP}{nP + Pm},$$

und ebenso hat man aus dem Dreiecke $Bn'm'$

$$\frac{P'F'}{n'B} = \frac{P'm'}{n'P' + P'm'} = \frac{Pm}{nP + Pm}.$$

Bezeichnen wir mit x die Entfernung des Punktes A von der ersten Hauptebene Pm, positiv gerechnet, wenn A bezüglich dieser Ebene im Sinne der Lichtbewegung voransliegt, negativ gerechnet im entgegengesetzten Falle, und nennen wir y die Entfernung des Punktes

A von der Axe, positiv oder negativ gerechnet, jenachdem A oberhalb oder unterhalb der Axe liegt. Ebenso seien x' und y' die Entfernungen des Punktes B von der zweiten Hauptebene und von der Axe, wobei wir bezüglich der Vorzeichen dieselben Bestimmungen treffen, wie früher bezüglich x und y. Es wird dann

$$Am = -x, \qquad n'B = x',$$
$$Pm = y, \qquad nP = -y',$$
$$FP = -f, \qquad P'F' = f',$$

und die vorhergehenden Gleichungen lauten:

$$\frac{f}{x} = -\frac{y'}{y - y'}, \tag{1}$$

$$\frac{f'}{x'} = \frac{y}{y - y'}. \tag{2}$$

Durch Summirung erhält man sofort

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1 \tag{I'}$$

und indem man (1) mit y und (2) mit y' multiplizirt und dann addirt

$$f\frac{y}{x} + f' \cdot \frac{y'}{x'} = 0. \tag{II''}$$

Die Gleichungen (1) und (2) können auch so geschrieben werden:

$$\frac{y}{y'} = 1 - \frac{x}{f}, \quad \frac{y'}{y} = 1 - \frac{x'}{f'}, \tag{II'}$$

und indem man diese Werthe in die Gleichung (III) Art. 33 setzt, geben sie

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}\left(1 - \frac{x'}{f'}\right), \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'}\left(1 - \frac{x}{f}\right), \tag{III'}$$

oder auch, wenn man sich erinnert, dass (34)

$$f' = -\frac{n'}{n}f,$$

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{x' - f'}{f}, \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{x - f}{f'}. \tag{III''}$$

Für die Knotenpunkte ist

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\omega'}{\omega} = 1,$$

für diese gehen also die Gleichungen (III″) über in

$$x - f = f', \quad x' - f' = f.$$

Wie also schon im Artikel 35 nachgewiesen wurde, ist die Distanz $x - f$ des ersten Knotenpunktes vom ersten Brennpunkte der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich der zweiten Brennweite und in gleicher Weise ist die Entfernung $x' - f'$ des zweiten Knotenpunktes vom zweiten Brennpunkte gleich der ersten Brennweite.

Indem man endlich die Gleichungen (II′) oder (III″) miteinander multiplizirt, erhält man noch

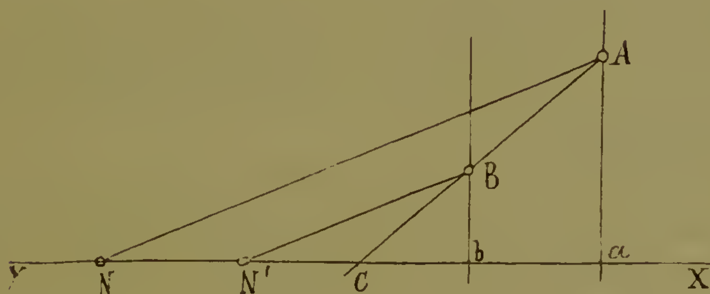
$$(x - f)(x' - f') = ff', \tag{V}$$

und diese Gleichung sagt, dass das Product aus der Entfernung eines Punktes von der ersten Brennebene und der Entfernung seines conjugirten Punktes von der zweiten Brennebene constant ist und gleich dem Producte der beiden Brennweiten.

Da f und f' immer entgegengesetztes Vorzeichen haben, so muss Gleiches auch für $x - f$ und $x' - f'$ stattfinden, d. h. wenn ein leuchtender Punkt sich links vom ersten Brennpunkt befindet, so wird der zu ihm conjugirte Punkt rechts vom zweiten Brennpunkt liegen und umgekehrt, liegt der leuchtende Punkt rechts vom ersten Brennpunkt, so liegt der conjugirte Punkt links vom zweiten Brennpunkt. Die Entfernungen zweier conjugirter Punkte von ihren bezüglichen Brennpunkten stehen ferner zu einander im umgekehrten Verhältniss. Bewegt sich der leuchtende Punkt von der linken Seite des Systemes aus unendlicher Entfernung bis zum ersten Brennpunkt, so geht der conjugirte Punkt vom zweiten Brennpunkte aus bis in's Unendliche nach rechts; und bewegt sich der leuchtende Punkt weiter vom ersten Brennpunkt nach rechts hin bis in's Unendliche, so rückt der conjugirte Punkt aus dem Unendlichen von links her bis zum zweiten Brennpunkt.

39. Es wurde nachgewiesen, dass zwei conjugirte Bilder immer perspectivisch sind bezüglich eines auf der Axe des Systemes gelegenen Punktes, d. h. dass die Geraden, welche die Punkte eines der Bilder mit den entsprechenden des anderen verbinden, die Axe in einem und demselben Punkte treffen. Wir können jetzt die Lage dieses Punktes bestimmen.

Fig. 13.



Es seien N, N' (Fig. 13) die Knotenpunkte des Systemes, Aa, Bb zwei conjugirte Ebenen und A, B zwei in diesen Ebenen gelegene conjugirte Punkte; ziehen wir AB, und ist C der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Axe, so wird C der perspectivische Mittelpunkt sein, um dessen Bestimmung es sich handelt. Zieht man noch NA und $N'B$, welche Geraden wegen der charakteristischen Eigenschaft der Knotenpunkte zu einander parallel sind, so werden die beiden Dreiecke CNA und $CN'B$ ähnlich sein und hieraus folgt

$$\frac{NC}{NN'} = \frac{CA}{BA}$$

oder, weil wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke CAa, CBb

$$\frac{CA}{BA} = \frac{aA}{aA - bB} = \frac{y}{y - y'}$$

ist, auch

$$\frac{NC}{NN'} = \frac{y}{y - y'} .$$

In ganz analoger Weise folgt

$$\frac{N'C}{NN'} = \frac{y'}{y - y'} ,$$

und wenn man nun die Gleichungen (1), (2) und die erste der (II') (38) berücksichtigt, wird

$$NC = NN' \frac{f'}{x'}, \qquad N'C = -NN' \frac{f}{x}, \qquad \text{(VI)}$$

$$\frac{NC}{N'C} = \frac{y}{y'} = 1 - \frac{x}{f}.$$

Irgend eine dieser Gleichungen kann zur Berechnung der Lage des Punktes C dienen, sobald die Knotenpunkte gegeben sind und die Entfernung einer der beiden conjugirten Ebenen von der bezüglichen Hauptebene.

Erinnern wir uns, dass f und f' immer entgegengesetzte Vorzeichen haben (34), so folgt aus (VI), dass wenn x und x' gleiches Vorzeichen haben, gleiches auch stattfindet bezüglich der Entfernungen des Punktes C von den beiden Knoten, d. h. dass C ausserhalb der Strecke NN' liegt. Diese Entfernungen haben hingegen entgegengesetzte Vorzeichen, C liegt innerhalb der Strecke NN', wenn x und x' entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Für $x = x' = o$, also für die beiden Hauptebenen, folgt aus (VI) $NC = N'C = \infty$, wie es sein muss.

Wird $x = \infty$, so ist $x' = f'$ und die Gleichungen (VI) geben dann

$$NC = NN', \qquad N'C = o,$$

der Punkt C fällt mit N' zusammen. Wird hingegen $x = f$ und $x' = \infty$, also

$$NC = o, \qquad N'C = NN',$$

so fällt C in den Knotenpunkt N.

Der erste Knotenpunkt ist daher das Aehnlichkeitscentrum zweier conjugirter Bilder, wenn das eine von ihnen in der ersten Brennebene und somit das andere unendlich weit liegt, hingegen wird der zweite Knotenpunkt Aehnlichkeitscentrum zweier conjugirter Bilder, wenn das eine in der zweiten Brennebene, das andere unendlich weit liegt.

Diese Eigenschaft könnte auch zur Definition der Knotenpunkte dienen.

40. Die in diesem Paragraph gezeigten Constructionen (37) sind analog denjenigen, mit welchen sich der Artikel 22 beschäftigt, und die Gleichungen (I′), (II″), (II′), (III′), (III″), (IV),(V) sind identisch mit jenen der Artikel 18 und 21 für ein System von nur zwei durchsichtigen, durch eine brechende Fläche von einander getrennten Medien giltigen. Diese Bemerkung ist wichtig, sie gestattet auf diesen einfacheren Fall den allgemeinen zurückzuführen.

In der That zeigt die Vergleichung der Formel (IV) im Artikel 36 mit (IV) im Artikel 18, dass, wenn man eine brechende Fläche annimmt, deren Scheitel im ersten Hauptpunkt und deren Krümmungsmittelpunkt im ersten Knotenpunkt liegt und wenn man weiter das erste und letzte Medium bis zu dieser Fläche sich erstrecken lässt, ein System von zwei Medien entsteht, welches die gleichen Brennweiten hat wie das gegebene zusammengesetzte System. Ferner zeigt die Identität der auf die Lage conjugirter Punkte bezüglichen Formeln, dass, wenn man zu einem gegebenen Complex leuchtender Punkte die conjugirten bestimmt, einmal bezüglich des angenommenen Systems zweier Medien, das andere Mal bezüglich des gegeben Systemes; die ersteren von der Axe gleichen Abstand wie die letzteren, und von der brechenden Fläche gleichen Abstand haben werden, wie die bezüglich des gegebenen Systemes conjugirten Punkte von der zweiten Hauptebene.

Ist also irgend ein dioptrisches System gegeben, so kann man zu einem einfallenden Strahl den austretenden oder zu einem gegebenen Punkte den conjugirten oder zu einer gegebenen Figur das conjugirte Bild wie folgt finden: m a n n e h m e e i n d i o p t r i s c h e s S y s t e m a n, g e b i l d e t a u s d e n b e i d e n ä u s s e r s t e n M e d i e n a l l e i n u n d d i e s e g e t r e n n t d u r c h e i n e K u g e l f l ä c h e, d i e i h r e n S c h e i t e l i m e r s t e n H a u p t p u n k t e u n d i h r C e n t r u m i m e r s t e n K n o t e n p u n k t h a t; m a n b e s t i m m e d e n g e s u c h t e n a u s t r e t e n d e n S t r a h l o d e r d e n c o n j u g i r t e n P u n k t o d e r d a s c o n j u g i r t e B i l d, w i e s i e s i c h f ü r d i e s e s e i n f a c h e a n g e n o m m e n e S y s t e m e r g e b e n w ü r d e n, u n d v e r s c h i e b e s i e s o d a n n p a r a l l e l d e r A x e u m

eine Länge, die der Grösse und dem Vorzeichen nach übereinstimmt mit der Distanz der Hauptpunkte des gegebenen Systemes.

Mit anderen Worten: eine einzige brechende Fläche stellt ein System dar, in welchem die beiden Hauptpunkte mit dem Scheitel der Fläche und die beiden Knoten mit dem Krümmungsmittelpunkt zusammenfallen; die an derselben gebrochenen Strahlen werden mit denen eines gegebenen Systemes, das dieselben Brennweiten, aber irgendwie gelegene Hauptpunkte hat, zur Deckung gebracht, wenn man die Strahlen parallel der Axe um eine Strecke verschiebt, die der Grösse und dem Vorzeichen nach mit der Distanz der Hauptpunkte des gegebenen Systemes übereinstimmt.

41. Dieses Hilfsmittel, die Aufgaben bezüglich eines beliebig gegebenen dioptrischen Systemes zu reduciren auf die entsprechenden bezüglich einer einzigen brechenden Fläche, ist nicht ohne Abänderung anwendbar, wenn die beiden äussersten Medien gleiche Brechungsindices haben.[1]) Aber es wird sich zeigen (73), dass man in diesem Falle dem gegebenen Systeme ein ideelles, aus drei Medien bestehendes substituiren kann, in welchem die beiden äussersten Medien identisch sind und die beiden brechenden Flächen mit den beiden Hauptebenen in eine Ebene zusammenfallen. Ein solches System heisst eine unendlich dünne Linse und besitzt sehr einfache Eigenschaften, die wir entwickeln werden.

§ 3. *Bestimmung der Fundamentalpunkte.*

42. Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, genügt es, um die Wirkung irgend eines dioptrischen Systemes zu untersuchen, seine Fundamentalpunkte zu kennen. Es ist daher nothwendig,

---

1) In diesem Falle könnte man einen sphärischen Spiegel annehmen, der seinen Scheitel im ersten Hauptpunkte und sein Centrum in dem Punkte hat, der bezüglich der ersten Brennebene symmetrisch liegt zum ersten Hauptpunkt; man hätte dann die betreffenden Constructionen hinsichtlich dieses Spiegels zu machen, zu den gefundenen Punkten die bezüglich der ersten Hauptebene symmetrischen zu suchen und das Ganze parallel der Axe um eine Strecke zu verschieben, die gleich ist dem Abstande der beiden Hauptpunkte des gegebenen Systemes.

dass man diese in jedem Falle anzugeben wisse. Das Problem, zu dem wir so geführt werden, theilt sich in zwei: entweder sind die Lagen und Krümmungsradien der brechenden Flächen sowie die Brechungsindices der aufeinanderfolgenden Medien gegeben und man will aus diesen Daten durch Construction oder Rechnung die Lage der Fundamentalpunkte finden; oder, es ist ein wirklich ausgeführtes System gegeben und man will auf experimentellem Wege die genannten Punkte finden. Mit diesen beiden Aufgaben werden wir uns der Reihe nach zu beschäftigen haben.

Um die erste zu lösen genügt es nach dem, was im Artikel 32 gesagt wurde, den Weg zu bestimmen, den ein parallel zur Axe einfallender Lichtstrahl durch das System hindurch verfolgt; die Austrittsgerade, die man so erhält, schneidet die Axe im zweiten Brennpunkte und die Einfallsgerade in einem Punkte der zweiten Hauptebene, die hierdurch ebenfalls gegeben ist. Indem man sodann die Einfallsgerade bestimmt, die einer zur Axe parallelen Austrittsgeraden entspricht, so wird man den ersten Brennpunkt und die erste Hauptebene erhalten. Diese Bestimmungen aber lassen sich ausführen durch Anwendung der im I. Kapitel gegebenen Constructionen oder Formeln auf die aufeinanderfolgenden brechenden Flächen.

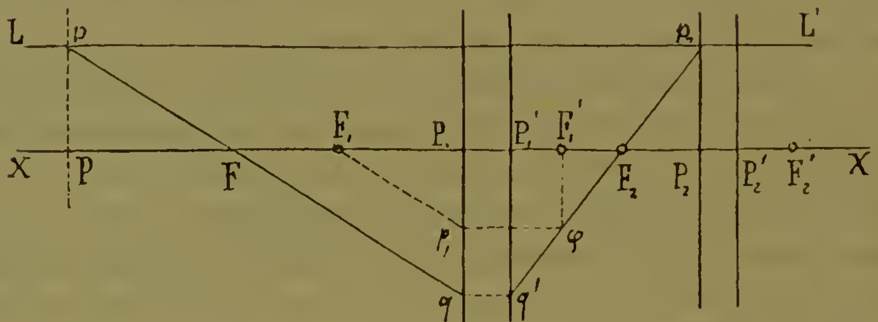
43. Man kann jedoch auch in anderer Weise vorgehen. Ein irgendwie zusammengesetztes System kann man aus einfacheren Systemen gebildet ansehen und diese können, wenn nöthig, ihrerseits wieder in einfachere Systeme zerlegt werden. Man wird so auf Systeme kommen, von denen man die Fundamentalpunkte bereits kennt, und wir werden im Stande sein in jedem Falle die Lagen der Fundamentalpunkte des vorgelegten Systemes zu bestimmen, wenn wir die folgende Aufgabe zu lösen wissen:

Aufgabe. Es sollen die Fundamentalpunkte eines Systemes gefunden werden, das aus zwei Systemen besteht, deren Fundamentalpunkte bekannt sind.

Es seien F_1, F_1', P_1, P_1' (Fig. 14) die Brenn- und Haupt-Punkte des ersten, F_2, F_2', P_2, P_2' Brenn- und Haupt-Punkte des zweiten Systemes. Um den ersten Brennpunkt und den ersten Hauptpunkt des aus den vorigen Systemen zusammengesetzten Systemes

zu finden, ziehen wir LL' parallel der Axe und betrachten diese Gerade als Austrittsgerade. Wir ziehen dann durch den Punkt F_2 die Gerade $p_2 F_2 q'$ und durch q', $q'q$ parallel zur Axe; weiter ziehen wir durch den Punkt φ, in welchem $p_2 q'$ die Brennebene $F_1'\varphi$ schneidet, die Gerade φp_1 parallel zur Axe und aus p_1 die Gerade

Fig. 14.



$p_1 F_1$ durch den Brennpunkt F_1, machen wir endlich qFp parallel zu $p_1 F_1$, so ist diese Gerade die Einfallsgerade, welche der Austrittsgeraden LL' entspricht; sie schneidet die Axe in F und LL' in p, dann ist F der erste Brennpunkt des zusammengesetzten Systemes und p ist ein Punkt der ersten Hauptebene desselben; der Fusspunkt P des von p auf die Axe gefällten Perpendikels ist also der erste Hauptpunkt.

In ähnlicher Weise würden wir den zweiten Brennpunkt und den zweiten Hauptpunkt erhalten, welche Punkte wir beziehungsweise durch F' und P' bezeichnen.

Um die Lagen der Punkte F, F', P, P' durch Rechnung zu finden, lassen sich sehr einfache Formeln ableiten, zu denen man leicht durch Anwendung der Gleichung (V) und Benutzung der Figur 14 gelangt.

Zu diesem Zwecke nennen wir f_1, f_1' die Brennweiten des ersten Partialsystemes, setzen also $f_1 = - F_1 P_1$, $f' = P_1' F_1'$; in ähnlicher Weise seien f_2 und f_2' die Brennweiten $- F_2 P_2$ und $P_2' F_2'$ des zweiten Partialsystemes und durch D werde die Entfernung $F_1' F_2$ zwischen dem zweiten Brennpunkte des ersten und dem ersten Brennpunkte des zweiten Systemes bezeichnet. Indem wir

noch bezüglich der Vorzeichen die gewöhnlichen Bestimmungen eintreten lassen, verwenden wir die Gleichung (V)

$$(x - f)(x' - f') = ff' \tag{V}$$

um aus derselben bezüglich des ersten Systemes die Lage des Punktes F durch die des Punktes F_2 auszudrücken. Wir haben demgemäss in (V) f_1, f_1' an Stelle von f, f' zu setzen, ferner D für $x' - f'$ und F_1F für $x - f$ zu schreiben und haben so

$$F_1F = \frac{f_1 f_1'}{D}. \tag{1}$$

Wenn wir ebenso die Gleichung (V) auf das zweite System anwenden und auf die Punkte F_1', F', welche bezüglich desselben conjugirt sind, also f_2, f_2' an die Stelle von f, f', $-D$ für $x - f$ und $F_2'F'$ für $x' - f'$ setzen, erhalten wir

$$F_2'F' = -\frac{f_2 f_2'}{D}. \tag{2}$$

Diese beiden Formeln (1) und (2) geben die Lagen der beiden Brennpunkte F_1F_1' des zusammengesetzten Systemes. Es erübrigt noch die beiden Brennweiten zu berechnen, die wir f und f' nennen wollen; hierzu dient die Figur 14.

Wir haben in der That aus den ähnlichen Dreiecken PpF, $P_1p_1F_1$:

$$PF = P_1F_1 \frac{Pp}{P_1p_1}.$$

Nun ist aber $Pp = P_2p_2$, $P_1p_1 = F_1'\varphi$ und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $F_1'\varphi F_2$ und $P_2p_2F_2$:

$$\frac{P_2p^2}{F_1'\varphi} = \frac{P_2F_2}{F_1'F_2},$$

also wird

$$PF = \frac{P_1F_1 \times P_2F_2}{F_1'F_2}$$

oder, weil $PF = f$, $P_1F_1 = f_1$, $P_2F_2 = f_2$, $F_1'F_2 = D$ ist, auch

$$f = \frac{f_1 f_2}{D}. \tag{3}$$

Eine ähnliche Gleichung würde man durch dasselbe Verfahren für f' finden. Wir können aber auch, ausgehend von (3), diese Gleichung erhalten, indem wir uns erinnern, dass, wenn n, n_1, n' die Brechungsindices sind bezüglich des ersten Mediums, des zwischen den beiden Systemen gelegenen und des letzten Mediums, die Beziehungen bestehen:

$$f' = -\frac{n'}{n} f, \qquad f_1' = -\frac{n_1}{n} f_1, \qquad f_2' = -\frac{n'}{n_1} f_2.$$

Wir werden dann haben:

$$f' = -\frac{n'}{n} f = -\frac{\frac{n_1}{n} f_1 \times \frac{n'}{n_1} f_2}{D}$$

oder auch

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{D}. \tag{4}$$

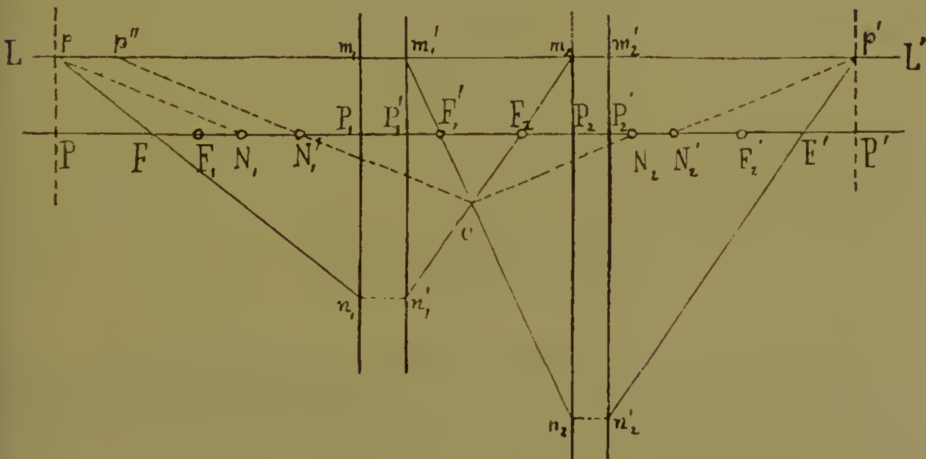
Die Gleichungen (1), (2), (3), (4) genügen zur Lösung der gestellten Aufgabe.

42. Dieselbe Aufgabe lässt sich noch durch eine Construction graphisch lösen, die oft einfacher zum Ziele führt als jene, deren wir uns soeben bedient haben und von der wir auch in den Anwendungen Gebrauch machen werden.

Seien wieder $F_1 F_1'$, $P_1 P_1'$, $N_1 N_1'$ (Fig. 15) die Fundamentalpunkte des ersten Systemes. $F_2 F_2'$, $P_2 P_2'$, $N_2 N_2'$ die des zweiten. In einer beliebigen Entfernung von der Axe ziehen wir die Gerade LL' parallel zu dieser und betrachten LL' erst als Einfallsgerade, sodann als Austrittsgerade. Unter der ersten Annahme entspricht ihr in dem beiden Systemen gemeinsamen Medium die Gerade $n_1' F_1' n_2$, unter der zweiten Voraussetzung die Gerade $n_1' F_2 m_2$. Diese beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte o; dieser Punkt ist, wie sich zeigen lässt, bezüglich des ersten Systemes conjugirt dem Punkte p, dem Schnittpunkte von LL' mit der ersten Hauptebene des zusammengesetzten Systemes und bezüglich des zweiten Systemes conjugirt dem Punkte p', in welchem LL' die zweite Hauptebene des ganzen Systemes trifft. In der That, die Punkte p und p', die zu einander conjugirt sind, müssen einem

und demselben Punkte des beiden Systemen gemeinsamen Mediums conjugirt sein. Aber der zu p bezüglich des ersten Systems conjugirte Punkt muss auf der Austrittsgeraden $m_1'n_2$ liegen, die zu LL' gehört und der zu p' bezüglich des zweiten Systems conjugirte Punkt muss auf der zu LL' gehörigen Einfallsgeraden $n_1'm_2$ gelegen sein; daher ist der zu p und p' gleichzeitig conjugirte Punkt der Punkt o. Von dieser Bemerkung ausgehend, können wir aus o die beiden Punkte p und p' bestimmen. Um p zu finden, ziehen wir oN_1' und aus N_1 eine Parallele zu oN_1'; letztere schneidet LL' in dem gesuchten Punkte p, und das auf die Axe gefällte Perpendikel pP gibt den ersten Hauptpunkt P. Durch eine analoge Construction findet man p' und P'.

Fig. 15.



Ziehen wir $n_1'n_1$ parallel zur Axe und verbinden wir p mit n_1. Die Punkte p und n_1 sind beziehungsweise conjugirt den Punkten o und n_1', die Geraden pn_1 und $n_1'm_2$ entsprechen sich also und daher ist pn_1 der Einfallsstrahl, der bezüglich des ganzen Systems den austretenden Strahl LL' erzeugt; der Punkt F ist somit der erste Brennpunkt. Den zweiten Brennpunkt finden wir durch eine ganz analoge Construction.

Verlängern wir oN_1' bis zum Schnittpunkte p'' mit LL'; die Geraden op'', om_1', om_2 bestimmen auf den parallelen Geraden PP' und LL' Abschnitte, die zueinander in demselben Verhältnisse stehen und wir haben daher:

$$\frac{m_1'p''}{m_1'm_2} = \frac{F_1'N'}{F_1'F_2}.$$

Indem wir beachten, dass $m_1'p'' = m_1p$ ist, so erhalten wir weiter

$$m_1p = \frac{F_1'N_1' \times m_1'm_2}{F_1'F_2}. \qquad (\alpha)$$

Aus den ähnlichen Dreiecken pPF, n_1m_1p folgt:

$$\frac{PF}{m_1p} = \frac{pP}{n_1m_1} = \frac{m_2P_2}{n_1'm_1'},$$

und die ähnlichen Dreiecke $m_2P_2F_2$, $n_1'm_1'm_2$ geben die Proportion

$$\frac{m_2P_2}{n_1'm_1'} = \frac{P_2F_2}{m_1'm_2},$$

somit erhalten wir aus diesen beiden Gleichungen

$$PF = \frac{m_1p \times P_2F_2}{m_1'm_2}.$$

Substituiren wir hierin den Werth von m_1p aus der Gleichung (α), so haben wir schliesslich:

$$PF = \frac{F_1'N_1' \times P_2F_2}{F_1'F_2}. \qquad (\beta)$$

Bezeichnen wir mit $\triangle$ die Entfernung $P_1'P_2$, der zweiten Hauptebene des ersten Systems von der ersten Hauptebene des zweiten und bemerken wir, dass $m_1p = P_1P$, $F_1'N_1' = P_1F_1 = f_1$, $P_2F_2 = f_2$ und dass $F_1'F_2 = D$ ist, so lassen sich die Gleichungen (α) und (β) folgendermassen schreiben:

$$P_1P = \frac{f_1\triangle}{D}, \qquad (5)$$

$$f = \frac{f_1f_2}{D}. \qquad (6)$$

Das gleiche Verfahren auf das zweite System angewendet würde liefern

$$P_2'P' = \frac{f_2'\triangle}{D} \qquad (7)$$

$$f' = -\frac{f_1'f_2'}{D}. \qquad (8)$$

Die Gleichungen (6) und (8) sind identisch mit (3) und (4), die wir im vorhergehenden Artikel auf anderem Wege gefunden haben; auch (5) und (7) liessen sich leicht aus (1) und (2) herleiten, indem man beachtet, dass mit Rücksicht auf die getroffene Uebereinkunft bezüglich der Vorzeichen die Beziehung gilt

$$D = \triangle + f_2 - f_1'.$$

Umgekehrt könnte man letztgenannte Gleichungen aus ersteren ableiten.

Setzen wir den eben hingeschriebenen Werth von D in (5), (6), (7) und (8), so werden diese Gleichungen:

$$P_1 P = \frac{f_1 \triangle}{\triangle + f_2 - f_1'}, \tag{5'}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{\triangle + f_2 - f_1'}, \tag{6'}$$

$$P_2' P' = \frac{f_2' \triangle}{\triangle + f_2 - f_1'}. \tag{7'}$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\triangle + f_2 - f_1'}. \tag{8'}$$

45. Wir gehen nun zum zweiten Theile unserer Aufgabe über und werden zeigen, wie man für ein wirklich ausgeführtes dioptrisches System die Fundamentalpunkte experimentell bestimmen kann.

Eine Art dieser Bestimmung, die sich von selbst darbietet, ist die folgende. Man messe die Entfernungen eines ebenen Objectes und seines Bildes von einer der äussersten Oberflächen des Systems oder von irgend einer anderen zur Axe senkrechten Ebene, die fest mit dem Systeme verbunden ist und die Grössen zweier homologer Dimensionen des Objectes und seines Bildes. Wenn d und d' die genannten Entfernungen und h, h' die unbekannten Entfernungen der beiden Hauptebenen von der fixen Ebene sind, so werden die Differenzen $d-h$ und $d'-h'$ gleichbedeutend sein mit den Distanzen, die in den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen mit x und x' bezeichnet wurden. Andererseits werden die gemessenen homologen Dimensionen proportional den Grössen, welche in dem genannten

Paragraphen durch y und y' ausgedrückt wurden; daher lassen sich die Gleichungen (I'), (II'') so schreiben:

$$\frac{f}{d-h} + \frac{f'}{d'-h'} = 1.$$

$$f\frac{y}{d-h} + f'\frac{y'}{d'-h} = 0.$$

Wiederholt man dieselben Messungen, nachdem das Object oder das dioptrische System verschoben wurde, so wird man andere Werthe d_1, d_1', y_1, y_1' erhalten, die den folgenden Gleichungen genügen müssen:

$$\frac{f}{d_1-h} + \frac{f'}{d_1'-h'} = 1.$$

$$f\frac{y_1}{d_1-h} + f'\frac{y_1'}{d_1'-h'} = 0.$$

Man hat sodann vier Gleichungen, welche zur Bestimmung der vier Unbekannten f, f', h, h' hinreichen.

Die Methode ist zwar allgemein, allein bei ihrer Anwendung ist noch Einiges zu beachten: wir müssen zu diesem Zwecke zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: das System ist convergent. Dass dieser Fall vorhanden, zeigt sich, wenn das System von einem weit entfernten Objecte ein reelles und verkehrtes Bild gibt; alsdann lässt sich die Methode direct anwenden. Das Object kann verschieden gewählt werden: eine helle Scheibe oder eine transparente Theilung kann hierzu dienen. Das Bild kann direct auf einen Schirm aufgefangen werden wenn man im Dunkeln experimentirt und das Object gut beleuchtet; besser ist es, dasselbe durch ein einfaches Mikroscop (80) von kurzer Brennweite zu beobachten, in dessen Brennebene ein Mikrometer oder eine mit einer Theilung versehene transparente Platte angebracht ist.

Zu diesen Operationen kann man sich auch des F o c o m e t e r s von S i l b e r m a n n bedienen. Dieser Apparat ist folgendermassen eingerichtet. Längs einer getheilten horizontalen Schiene ist ein vertikaler Träger verschiebbar, auf welchem das dioptrische System

mit horizontaler Axe befestigt werden kann. Ein anderer verschiebbarer Träger ist mit einem, an seiner unteren Hälfte mit Papier überspannten Ringe versehen und längs des Durchmessers, der die obere Grenze dieser Papierfläche bildet, ist eine Theilung angebracht. Ein ebensolcher, aber fester Ring befindet sich an dem anderen Ende, der mit einem einfachen Mikroscope verbunden ist, zur Beobachtung der an diesem Ringe angebrachten Theilung, sowie des Bildes, welches das dioptrische System von der anderen Theilung entwirft und das durch Regulirung der Entfernungen in die Ebene der direct durch das Mikroscop gesehenen Theilung gebracht werden kann. Man schiebt das System an irgend eine Stelle und verstellt dann den beweglichen Ring solange, bis man das Bild der Theilung desselben durch das Mikroscop, das auf die Ebene des anderen Ringes eingestellt ist, scharf erblickt; mittelst der festen Theilung misst man die Länge einer bestimmten Zahl von Scalentheilen des Bildes. Man gibt dann dem System eine andere Stellung und wiederholt diese Messungen. Die Werthe von d und d' werden auf der horizontalen Schiene abgelesen, y und y_1 an dem verkehrten Bilde der Scala des beweglichen Ringes und y' y_1' direct an der Theilung des festen Ringes.

Zweiter Fall: Das System ist divergent. In diesem Falle verbindet man mit dem gegebenen Systeme ein convergentes, dessen Fundamentalpunkte man kennt und das so beschaffen ist, dass das resultirende zusammengesetzte System ein convergentes wird. Sodann wird wie oben verfahren. Hat man die Fundamentalpunkte des zusammengesetzten Systems gefunden, so ergeben sich aus der Lage dieser und der Fundamentalpunkte des convergenten Hilfssystems durch Rechnung oder durch Construction die Fundamentalpunkte des gegebenen divergenten Systems.

Oft haben die Hauptpunkte eines Systems solche Lagen, dass sie leicht durch Rechnung gefunden werden können und Ungenauigkeiten bei dieser Rechnung gegenüber den Brennweiten ohne Belang sind; diess trifft z. B. zu bei einfachen Linsen von geringer Dicke und grosser Brennweite. Dann genügt es auch experimentell nur die Brennpunkte zu bestimmen. Hierfür gibt es sehr einfache Verfahrungsarten, von denen wir zwei anführen wollen.

Die erste dieser Methoden ist nicht sehr genau, hat aber für sich, dass sie nur Hilfsmittel erfordert, die Jeder sich selbst herstellen kann. Sie besteht darin, dass man auf das dioptrische System die directen Sonnenstrahlen parallel der Axe einfallen lässt und die Stelle aufsucht, an welcher die beleuchtete Fläche, welche die austretenden Strahlen auf einen weissen Schirm erzeugen, den kleinsten Durchmesser hat. Um durch dieses Verfahren die Genauigkeit zu erreichen, die es zulässt, nimmt man ein Brettchen, auf das man rechtwinklig eine mit Theilung versehene Leiste befestigt und richtet dieses so gegen die Sonne, dass die Leiste keinen Schatten wirft; sodann verschiebt man das dioptrische System längs der Leiste so lange, bis auf dem Brettchen die beleuchtete Fläche den kleinsten Durchmesser zeigt. Auf der Theilung liest man unmittelbar die Entfernung dieses Bildes von einem Punkte des Systems ab.

Die andere Methode erfordert die Anwendung eines Fernrohrs, ist aber dafür einer viel grösseren Genauigkeit fähig; es ist die Methode, welche Maskeline zur Bestimmung der Brennweiten von Telescop-Objectiven angewendet hat. Wir werden sehen (102), dass die Fernrohre Instrumente sind, die zur Betrachtung sehr weit entfernter Gegenstände dienen, so weit entfernter, dass die Lichtstrahlenbündel, die von ihren einzelnen Punkten auf das Objectiv fallen, als Parallelstrahlenbündel angesehen werden dürfen. Wenn nun ein Fernrohr auf ein sehr weit entferntes Object eingestellt worden ist und man bringt es durch irgend ein Hilfsmittel dahin, dass ein in geringer Entfernung befindliches Object durch dieses Fernrohr vollkommen scharf gesehen wird, so wird man sicher sein, dass durch dieses Hilfsmittel die von dem Objecte ausgehenden Lichtstrahlenbündel in Parallelstrahlenbündel verwandelt wurden, bevor sie das Instrument trafen. Man stellt also ein Fernrohr so ein, dass man durch dasselbe einen sehr weit entfernten Gegenstand scharf sieht; dann bringt man vor dasselbe das dioptrische System, dessen Brennpunkt man finden will und richtet seine Axe möglichst parallel zu der des Fernrohrs. Durch dieses wird man nunmehr weit entfernte Gegenstände nicht sehen können, wol aber wird man jene scharf erblicken, die sich in der Brennebene des dioptrischen Systems befinden. Man bringt nun hinter dieses System eine sehr kleine Schrift,

oder eine Zeichnung mit feinen Linien, oder, wie Fraunhofer vorgeschlagen hat, ein Fadenkreuz aus äusserst feinen Fäden und sucht jene Lage, bei welcher diese Objecte mit grösster Schärfe durch das Fernrohr gesehen werden, dann fällt diese mit der gesuchten Brennebene zusammen.

Ist das zu untersuchende System divergent, so verbindet man dasselbe mit einem solchen convergenten Systeme, dass das Ganze ein convergentes System liefert und verfährt wie früher.

Mit Hilfe homogener und intensiver Parallelstrahlenbündel, wie sie die Mittel physikalischer Laboratorien herzustellen gestatten, kann man die Fundamentalpunkte irgend eines dioptrischen Systems auf folgende sehr einfache Art bestimmen.

Man stellt das gegebene System VV' (Fig. 16) in ein cylindrisches Bündel von parallelen und homogenen Strahlen, dessen

Fig. 16a.

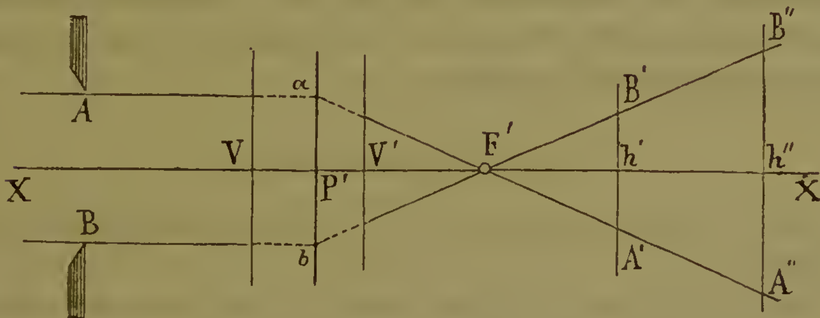
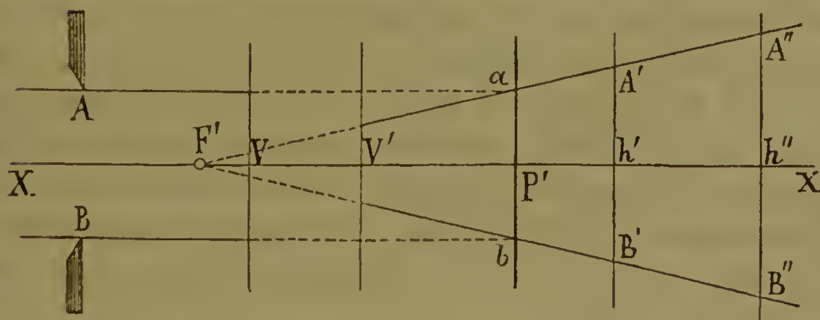


Fig. 16b.



Durchmesser AB gemessen wurde. Verschiebt man auf der anderen Seite des Systems einen Schirm, so wird man sofort erkennen, ob der zweite Brennpunkt ausserhalb (Fig. 16a) oder innerhalb (Fig. 16b) liegt und wird im ersten Falle die Lage von F' direct bestimmen

können, indem man jene Stellung des Schirmes sucht, für welche sein Durchschnitt mit dem austretenden Strahlenkegel ein Minimum ist und in jedem Falle, in dem man für zwei Lagen $A'h'B'$, $A''h''B''$ des Schirmes die Durchmesser $A'B'$, $A''B''$ der betreffenden Schnitte mit dem Lichtkegel sucht, und die Distanz $h'F'$ mittelst der Proportion berechnet

$$\frac{h'F'}{h''h'} = \frac{A'B'}{A''B'' - A'B'}.$$

Hat man einmal den Brennpunkt F' gefunden, so bestimmt sich sofort die Lage des Hauptpunktes P', indem aus den beiden ähnlichen Dreiecken abF', $A'B'F'$ folgt:

$$F'P' = \frac{F'h' \times AB}{A'B'}.$$

Kehrt man das dioptrische System um, und wiederholt diese Operationen, so ergibt sich ebenso der erste Brennpunkt F und der erste Hauptpunkt P. Bei exacter Ausführung dieser Bestimmungen muss man $FP = P'F'$ erhalten.

§ 4. *Telescopische Systeme.*

46. Es kann vorkommen, dass gar keine Fundamentalpunkte existiren.

Wenn z. B. das dioptrische System in zwei Systeme A und B so zerlegt werden kann, dass der zweite Brennpunkt von A mit dem ersten Brennpunkt von B zusammenfällt, so wird jeder zur Axe parallele Strahl aus dem Systeme A nach einer Geraden, die durch den ersten Brennpunkt von B geht und daher aus dem ganzen Systeme parallel der Axe austreten. Eigentliche Brennpunkte und Hauptpunkte (32) gibt es also nicht, und mit diesen hören auch die Knotenpunkte (35) zu existiren auf. Gleiches sagen auch die Gleichungen (1), (2), (3), (4) der vorhergehenden Paragraphen, denn sie geben für $D = 0$

$$F_1 F = F_2' F' = f = f' = \infty.$$

Wenn ferner alle Systeme von zwei Medien, aus denen das ganze System zusammengesetzt ist, von der Art des im Artikel 24 behan-

dehten, wenn also alle Trennungsflächen Ebenen sind, wird ebenfalls einem zur Axe parallel einfallenden Strahle eine zur Axe parallele Austrittsgerade entsprechen und die Fundamentalpunkte liegen demnach wieder im Unendlichen.

In beiden Fällen wird jedem einfallenden Parallelstrahlenbündel ein austretendes Parallelstrahlenbündel entsprechen. Hat nun ein dioptrisches System die Eigenschaft, dass jedem Bündel paralleler Einfallsgeraden ein Bündel paralleler Austrittsgeraden entspricht, so nennen wir es ein telescopisches. Der Grund dieser Benennung wird später klar werden, wenn wir zu den Anwendungen übergehen.

Es ist leicht zu beweisen, dass die beiden soeben genannten Fälle die einzigen sind, in denen ein System ein telescopisches sein kann; also zu beweisen, dass, wenn ein System telescopisch ist, jedenfalls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein werden: entweder kann das System immer in zwei solche nichttelescopische Systeme zerlegt werden, dass der erste Brennpunkt des zweiten zusammenfällt mit dem zweiten Brennpunkte des ersten; oder alle Trennungsflächen sind Ebenen.

Um dieses zu zeigen bemerken wir zuerst, dass die Systeme *A* und *B*, in welche man irgend ein telescopisches System zerlegt denkt, entweder beide nichttelescopisch sind und dann fällt der zweite Brennpunkt des ersten mit dem ersten Brennpunkte des zweiten zusammen, oder aber es sind beide telescopisch.

In der That, wäre z. B. das System *A* telescopisch, *B* hingegen nicht, so würden parallel einfallende Strahlen auch parallel aus *A* austreten und folglich aus *B* nach Richtungen, die sich in einem Punkte der zweiten Brennebene von *B* schneiden und welche daher auch die zweite Brennebene des ganzen Systems wäre. Existirt aber eine Brennebene, so existirt auch die andere (34), das System würde nicht telescopisch sein.

Dieses vorausgeschickt, nehmen wir an, es sei ein beliebiges telescopisches System gegeben. Dasselbe kann man sich bestehend denken aus zwei Systemen *A* und *B*, die entweder beide nicht tele-

scopisch oder beide telescopisch sein können. Im ersten Falle müssen der zweite Brennpunkt von A und der erste von B zusammenfallen, andernfalls hätte das ganze System Brennpunkte, die nach den Formeln (1) und (2) des vorhergegangenen Paragraphen bestimmbar sind. Im zweiten Falle kann man, wenn eines der beiden Systeme, z. B. B, nicht aus einer einzigen brechenden Fläche besteht, dasselbe wieder in zwei Systeme A_1 und B_1 zerlegt denken, die entweder beide nicht telescopisch sind und zusammenfallende Brennpunkte haben, oder beide gleichzeitig telescopisch. Unter der ersten Voraussetzung werden A und A_1 ein nicht telescopisches System bilden, das seinen zweiten Brennpunkt im ersten von B_1 hat (wie aus der vorhergehenden Bemerkung erhellt) und das ganze System kann aus diesem Systeme und aus B_1 zusammengesetzt gedacht werden. Unter der zweiten Voraussetzung kann man, wenn eines der beiden Systeme A_1 und B_1 mehr als eine Trennungsfläche hat, dieses seinerseits wieder zerlegen. Kommt man so weiter fortfahrend nicht auf zwei nichttelescopische Systeme mit coincidirenden Brennpunkten, so wird man schliesslich das ganze System in einfache telescopische Systeme, gebildet aus einer einzigen Trennungsfläche, d. h. in Systeme mit einer einzigen ebenen Trennungsfläche zerlegt haben, was gezeigt werden sollte.

Auf telescopische Systeme können die Constructionen und Formeln des § 2 nicht angewendet werden. Aber sie besitzen bemerkenswerthe Eigenschaften, von denen einige Gegenstand dieses Paragraphen sind, andere später, wenn von den Anwendungen gehandelt wird, untersucht werden sollen.

47. Wir beginnen mit dem allgemeinen Falle und setzen voraus, dass nicht alle Trennungsflächen des Systems Ebenen seien. Dann können wir das telescopische System aus zwei nicht telescopischen Systemen A und B bestehend ansehen, wobei der zweite Brennpunkt von A mit dem ersten von B zusammenfällt (46). Nennen wir f_1, f_1' die beiden Brennweiten des Systems A, f_2, f_2' die Brennweiten des Systems B und um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, es seien (Fig. 17) P_1' und P_2 der zweite Hauptpunkt von A und der erste Hauptpunkt von B und der mit $\frac{F_2}{F_1'}$ bezeichnete

Punkt sei jener, in welchem der zweite Brennpunkt des ersten Systems mit dem ersten Brennpunkt des zweiten zusammenfallen.

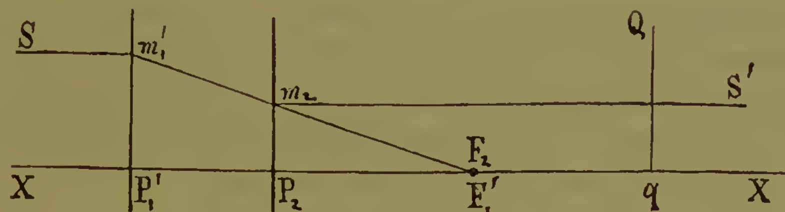
Betrachten wir einen leuchtenden Punkt, dessen Entfernungen von der ersten Hauptebene des Systems A und von der Axe x und y seien und suchen wir seinen bezüglich des ganzen Systems conjugirten Punkt, für welchen x' und y' die Entfernungen von der zweiten Hauptebene des Systems B nnd von der Axe sind. Zu diesem Zwecke haben wir auf die nichtteleskopischen Systeme A und B nacheinander die Formeln (V) und (II′) des Paragraphen 2 in Anwendung zu bringen, nämlich

$$(x-f)\,(x'-f') = ff' \qquad \text{(V)}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{f-x}{f}, \quad \frac{y'}{y} = \frac{f'-x'}{f'}. \qquad \text{(II')}$$

Es sei Q der zum gegebenen Punkte bezüglich des Systems A conjugirte Punkt und Qq senkrecht zur Axe gezogen; um die Glei-

Fig. 17.



chung (V) auf das System A anzuwenden, haben wir an Stelle von $x'-f'$ zu setzen $P_1'q - P_1'F_1' = F_1'q$ und behufs Anwendung derselben Formel auf das System B statt $x-f$ zu schreiben $P_2q - P_2F_2 = F_2q$. Somit haben wir

für das System A $\quad (x-f_1)\,F_1'q = f_1f_1'$

und für das System B $\quad F_2q\,(x'-f_2') = f_2f_2'$.

Dividiren wir die zweite dieser Gleichungen durch die erste und bemerken, dass $F_2q = F_1'q$ ist, so erhalten wir

$$x'-f_2' = (x-f_1)\,\frac{f_2f_2'}{f_1f_1'}. \qquad (1)$$

Für ein anderes Paar conjugirter Punkte, für welches x, x' die Werthe ξ, ξ' haben, wird ebenso

$$\xi' - f_2' = (\xi - f_1)\,\frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}.$$

Wird von dieser Gleichung die frühere abgezogen, so folgt

$$\xi' - x' = (\xi - x)\,\frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'},$$

und diese Gleichung sagt:

In jedem telescopischen Systeme steht die gegenseitige Entfernung zweier Ebenen zur gegenseitigen Entfernung der Ebenen, zu denen erstere conjugirt sind, in einem constanten Verhältnisse.

Wir werden dieses constante Verhältniss die Elongation des telescopischen Systems nennen; bezeichnen wir dieselbe mit e, so ist also

$$e = \frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}. \tag{2}$$

Die Producte $f_1 f_1'$ und $f_2 f_2'$ sind immer beide negativ (34), die Elongation ist daher immer positiv, oder, was dasselbe ausdrückt, wenn in einem telescopischen Systeme ein leuchtender Punkt parallel zur Axe nach einer Seite hin verschoben wird, so verschiebt sich sein conjugirter Punkt nach derselben Richtung.

48. Auf den betrachteten leuchtenden Punkt wenden wir jetzt die Gleichungen (II′) an, und benützen bezüglich des Systems A die zweite, bezüglich des Systems B die erste dieser Gleichungen. Um die zweite Gleichung auf das System anzuwenden, haben wir f_1' statt f', qF_1' statt $f' - x'$ und qQ statt y' zu setzen, dann erhalten wir

$$\frac{qQ}{y} = \frac{qF'}{f_1'}.$$

In ähnlicher Weise haben wir bei Anwendung der ersten Gleichung auf das System B f_2 für f, qF_2 für $f - x$ und qQ für y zu schreiben und erhalten so

$$\frac{qQ}{y'} = \frac{qF_2}{f_2}.$$

Dividiren wir die erste dieser Gleichungen durch die zweite und bemerken wieder, dass $q F_1' = q F_2$, so ergibt sich

$$\frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f_1'}. \tag{3}$$

In Folge des im Artikel 31 bewiesenen Satzes hat dieses Verhältniss denselben Werth für alle sich entsprechenden Punkte zweier conjugirter Ebenen und stellt das Aehnlichkeitsverhältniss zweier in diesen Ebenen gelegenen conjugirten Bilder vor; die Gleichung (3) sagt nun, dass dieses Verhältniss für ein telescopisches System constant bleibt, wie man auch die Ebenen, welche die conjugirten Bilder enthalten, wählen mag.

Dieses constante Verhältniss zwischen homologen Strecken zweier conjugirter Bilder, die in zur Axe senkrechten Ebenen liegen, nennt man die lineare Vergrösserung des telescopischen Systems. Bezeichnen wir dieselbe mit l, so haben wir

$$l = \frac{f_2}{f_1'}. \tag{4}$$

Die Gleichung (3) und den in ihr enthaltenen Satz kann man auch direct wie folgt beweisen. Es sei $S m_1'$ (Fig. 17) eine zur Axe parallele Einfallsgerade; bezüglich des ersten Systems entspricht ihr die Austrittsgerade $m_1' F_1'$ und dieser entspricht wieder bezüglich des zweiten Systems die zur Axe parallele Austrittsgerade $m_2 S'$. Alle Punkte der Geraden $S m_1'$ haben ihre conjugirten auf der Geraden $m_2 S'$, welchen Punkt von $S m_1'$ man demnach als leuchtenden Punkt betrachten mag, man hat immer

$$l = \frac{y'}{y} = \frac{P_2 m_2}{P_1' m_1'}.$$

Aber die beiden ähnlichen Dreiecke $P_1' m_1' F_1'$ und $P_2 m_2 F_2$ geben

$$\frac{P_2 m_2}{P_1' m_1'} = \frac{P_2 F_2}{P_1' F_1'} = \frac{f_2}{f_1'}.$$

Daher ist wie oben

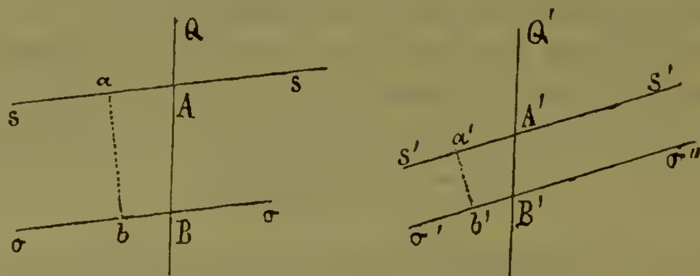
$$l = \frac{f_2}{f_1'}.$$

Je nachdem die lineare Vergrösserung positiv oder negativ ist, wird das zu einer gegebenen Figur gehörige conjugirte Bild aufrecht oder verkehrt sein. Die Gleichung (4) zeigt, dass l positiv oder negativ ist, je nachdem von den beiden nichttelescopischen Systemen, in welche das telescopische System zerlegt gedacht wird, das eine convergent, das andere divergent ist, oder beide gleichzeitig convergent sind (34). *Ein telescopisches System also, das aus zwei nichttelescopischen Systemen zusammengesetzt ist, von denen das eine convergent, das andere divergent ist, gibt aufrechte Bilder; ein telescopisches System aber, gebildet aus zwei nichttelescopischen Systemen, die beide convergent sind, gibt verkehrte Bilder.*

49. Betrachten wir ein cylindrisches Bündel von Einfallsgeraden und das ihm entsprechende cylindrische Bündel von Austrittsgeraden; man kann zeigen, *dass das Verhältniss des Durchmessers des letzteren Cylinders zu dem des ersteren gleich ist der linearen Vergrösserung des Systems.*

In der That, nehmen wir an, dass die Axen der beiden Cylinder in der Ebene der Figur (Fig. 18) gelegen und dass ss, $\sigma\sigma$ und $s's'$, $\sigma'\sigma'$ die Schnitte der Cylinder mit dieser Ebene seien; $s's'$, $\sigma'\sigma'$ werden die Austrittsgeraden vorstellen, welche den Einfallsgeraden ss, $\sigma\sigma$

Fig. 18.



entsprechen. Sind ferner Q und Q' zwei conjugirte Ebenen, so werden die Schnittpunkte $A'B'$ der Ebene Q' mit den Geraden $s's'$, $\sigma'\sigma'$ conjugirt sein zu den Schnittpunkten AB der Ebene Q mit den Geraden ss, $\sigma\sigma$. In Folge des früheren Satzes ist das Verhältniss $\frac{A'B'}{AB}$

constant und gleich der linearen Vergrösserung. Wegen der Kleinheit der Winkel, welche die Cylinderaxen mit der Axe des Systems bilden, können die Längen AB, $A'B'$ gleich gross angenommen werden mit den Durchmessern der Cylinder ab, $a'b'$; daher ist das Verhältniss $\frac{a'b'}{ab}$ gleich der Linearvergrösserung.

50. Die Gleichung (III) des Artikel 33 ist anwendbar auf telescopische Systeme wie auf nichttelescopische, weil bei ihrer Ableitung die Existenz der Fundamentalpunkte nicht vorausgesetzt zu werden braucht. Ist daher ω der Winkel zweier Einfallsgeraden und ω' der Winkel, den die entsprechenden Austrittsgeraden einschliessen, so ist auch im gegenwärtigen Falle

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} \frac{y}{y'}.$$

Nimmt man Rücksicht auf die Gleichungen (3) und (4), so kann man auch schreiben:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{f_1'}{f_2}, \text{ oder auch } \frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{l},$$

d. h. in jedem telescopischen Systeme ist das Verhältniss des von zwei Austrittsgeraden gebildeten Winkels zu dem Winkel der entsprechenden Einfallsgeraden constant.

Zwei Strahlencylinder, die unter einen gewissen Winkel gegen einander geneigt das dioptrische System treffen, werden aus demselben wieder als Cylinder austreten, aber einen Winkel miteinander bilden, welcher zu ersterem in einem constanten Verhältnisse steht.

Dieses constante Verhältniss nennt man die angulare Vergrösserung oder die Winkelvergrösserung des telescopischen Systems.

Bezeichnen wir dieselbe durch den Buchstaben m, so haben wir

$$m = \frac{n}{n'} \cdot \frac{f_1'}{f_2} \text{ oder } m = \frac{n}{n'} \frac{1}{l}. \qquad (5)$$

Die zweite dieser Gleichungen sagt, dass die angulare Vergrösserung gleich ist dem Producte der reciproken

linearen Vergrösserung in das Verhältniss der Brechungsindices des ersten und letzten Mediums.

In Folge des im Artikel 49 ausgesprochenen Satzes können wir auch sagen, dass die angulare Vergrösserung gleich ist dem Producte aus dem Verhältnisse der Brechungsindices des ersten zum letzten Medium in das Verhältniss des Durchmessers eines einfallenden Strahlencylinders zum Durchmesser des entsprechenden austretenden Strahlencylinders.

Der Gleichung (5) kann man noch eine andere Form geben. Bezeichnet man mit n_1 den Brechungsindex des zwischen den beiden Systemen gelegenen Mediums, so hat man (34)

$$f_1' = -\frac{n_1}{n} f_1$$

und

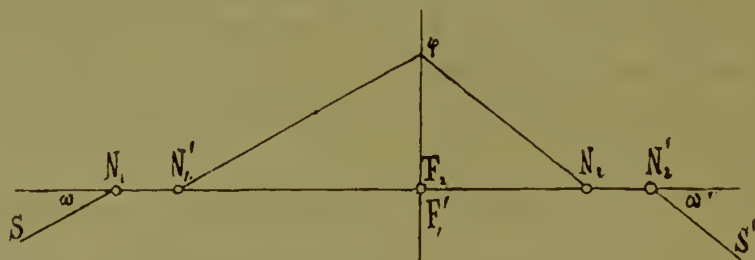
$$f_2 = -\frac{n_1}{n'} f_2',$$

welche Werthe in (5) eingesetzt, geben

$$m = \frac{f_1}{f_2'}. \qquad (6')$$

Diess kann auch wie folgt direct bewiesen werden. Es seien (Fig. 19) $N_1 N_1'$ die Knotenpunkte des Systems A und $N_2 N_2'$ die Knotenpunkte von B; weiter sei $F_1' F_2 \varphi$ die beiden Systemen ge-

Fig. 19.



meinsame Brennebene. Um die Richtung des austretenden Strahles zu bestimmen, der einem zu SN_1 parallel einfallenden Strahle entspricht, hat man nur $N_1'\varphi$ parallel zu SN_1 zu machen, sodann die

Gerade φN_2 und aus N_2' die Gerade $N_2' S'$ parallel zu φN_2 zu ziehen; alle zu $S N_1$ parallel einfallende Strahlen treten parallel zu $N_2 S'$ aus. Wenn wir noch mit ω und ω' die Winkel bezeichnen, welche die einfallenden und austretenden Strahlen mit der Axe des Systems bilden, und wenn wir ferner beachten, dass wegen ihrer Kleinheit diese Wirbel mit ihren Tangenten vertauscht werden können (2), so folgt sofort

$$\omega = \frac{F_2 \varphi}{F_1' N_1'}, \qquad \omega' = \frac{F_2 \varphi}{F_2 N_2}.$$

und hieraus weiter

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{F_1' N_1'}{F_2 N_2}.$$

Es ist aber (35)

$$F_1' N_1' = f_1, \qquad F_2 N_2 = f_2',$$

also

$$m = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{f_1}{f_2'},$$

wie oben.

51. Haben das erste, das letzte und das zwischen A und B gelegene Medium gleiche Brechungsindices, wie es bei den gewöhnlichen dioptrischen Instrumenten der Fall ist, bei welchen diese Medien durch die Luft gebildet werden, so ist

$$\frac{n_1}{n} = \frac{n_1}{n'} = \frac{n}{n'} = 1, \qquad f_1' = -f_1, \qquad f_2' = -f_2,$$

und die Gleichungen (2), (4), (5') reduciren sich auf die folgenden:

$$e = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2$$

$$l = -\frac{f_2}{f_1}$$

$$m = -\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{l},$$

die in Worten ausgedrückt lauten:

1. Die Elongation ist gleich dem Quadrate des Verhältnisses der Brennweite des Systems B zu der des Systems A;

2. Die lineare Vergrösserung ist gleich diesem Verhältnisse selbst mit negativen Vorzeichen genommen;

3. Die angulare Vergrösserung ist gleich der reciproken linearen Vergrösserung, also gleich dem negativ genommenen Verhältniss der Brennweite des Systems A zur Brennweite des Systems B.

Man ersieht hieraus, dass wenn m eine Vergrösserung bedeutet, l eine Verkleinerung ausdrückt und umgekehrt.

Die in den Artikeln (49) und (50) bewiesenen Sätze, die sich auf die Abhängigkeit zwischen der linearen, der angularen Vergrösserung und den Durchmessern einfallender und austretender Strahlencylinder beziehen, können für den Fall eines telescopischen Systems, bei welchem die äussersten Medien und das zwischen A und B gelegene Medium untereinander identisch sind, einfach so ausgesprochen werden:

Die lineare Vergrösserung ist dem absoluten Werthe nach gleich dem Verhältnisse des Durchmessers irgend eines austretenden cylindrischen Strahlenbündels zum Durchmesser des entsprechenden einfallenden Strahlencylinders.

Die angulare Vergrösserung ist dem absoluten Werthe nach gleich dem Verhältnisse des Durchmessers irgend eines einfallenden Strahlencylinders zum Durchmesser des entsprechenden austretenden Strahlencylinders.

52. Die telescopischen Systeme der zweiten Art, d. h. jene, bei denen alle Trennungsflächen zur Axe senkrechte Ebenen sind, haben Eigenschaften, die den soeben untersuchten ganz analog sind. Um dieses zu zeigen, brauchen wir nur auf die aufeinanderfolgenden Trennungsflächen die Sätze und Formeln des Artikels 24 anzuwenden.

Die erste der genannten Formeln

$$\frac{x}{x'} = \frac{n}{n'},$$

der Reihe nach auf alle Trennungsflächen angewendet, reicht hin, um in jedem Falle die zu einer gegebenen Ebene conjugirte zu be-

stimmen. Hat man so ein Paar conjugirter Ebenen gefunden, so erhält man mit deren Hilfe leicht irgend ein anderes Paar.

Es sei ξ die Entfernung irgend einer anderen gegebenen Ebene von der ersten Oberfläche des Systemes und $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_i, \xi'$ die Entfernungen ihrer bezüglich der ersten, der beiden ersten, der drei ersten ... des ganzen Systemes conjugirten Ebenen von der ersten, der zweiten, der dritten ... der letzten Trennungsfläche des Systemes, dann werden wir haben:

$$\frac{\xi - x}{\xi_1 - x_1} = \frac{n}{n_1}, \quad \frac{\xi_1 - x_1}{\xi_2 - x_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \ldots \quad \frac{\xi_i - x_i}{\xi' - x'} = \frac{n_i}{n'},$$

und indem wir diese Gleichungen multipliziren, erhalten wir

$$\frac{\xi - x}{\xi' - x'} = \frac{n}{n'}.$$

Es ergibt sich demnach wie für die früher untersuchten telescopischen Systeme (47) der Satz:

Das Verhältniss des Abstandes zweier Ebenen von einander zu dem gegenseitigen Abstande der Ebenen, zu denen sie conjugirt sind, ist constant.

Dieses constante Verhältniss, oder die Elongation des Systemes ist im gegenwärtigen Falle gleich dem Verhältnisse des Brechungsindex des letzten Mediums zu dem des ersten. Bezeichnen wir diese Elongation wieder mit e, so ist

$$e = \frac{n'}{n}.$$

Der zweite Satz des Artikels 24 lässt sofort erkennen, dass in einem dioptrischen Systeme dessen Trennungsflächen sämmtlich Ebenen sind, zwei conjugirte Bilder immer einander gleich sind.

Indem wir die früher festgetzten Benennungen auch im gegenwärtigen Falle gebrauchen, können wir sagen, dass für ein dioptrisches System mit lauter ebenen Trennungsflächen die lineare Vergrösserung constant und gleich der Einheit ist.

Wenn wir endlich den dritten Satz des Artikels 24 für die aufeinanderfolgenden Trennungsflächen unseres Systemes in Anwendung

bringen und mit ω den Winkel zweier einfallender Strahlen, mit ω_1 den Winkel der entsprechenden gebrochenen Strahlen im zweiten Medium, mit ω_2 den Winkel der gebrochenen Strahlen im dritten Medium . . . und mit ω' den Winkel der entsprechenden austretenden Strahlen bezeichnen, so werden die Gleichungen gelten:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{n_1}{n}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}, \; \ldots \quad \frac{\omega_i}{\omega'} = \frac{n'}{n_i},$$

die mit einander multiplizirt geben

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}.$$

Somit gilt wie für andere telescopische Systeme der Satz, dass das Verhältniss des Winkels zweier Austrittsgeraden zu dem Winkel der entsprechenden Einfallsgeraden constant ist.

Dieses Verhältniss ist im gegenwärtigen Falle gleich dem umgekehrten Verhältniss der den äussersten Medien zukommenden Brechungsindices; und unter Beibehaltung der früher festgesetzten Benennung werden wir sagen können, dass die angulare Vergrösserung des Systemes gleich ist dem Verhältnisse des Brechungsindex des ersten Mediums zu dem des letzten.

Sind die beiden äussersten Medien identisch, so werden die Elongation und die angulare Vergrösserung gleich der Einheit. Die austretenden Strahlen sind alsdann parallel den einfallenden.

ZWEITER THEIL.

Anwendungen.

ERSTES KAPITEL.

Das Auge.

53. Die erste Anwendung der entwickelten Theorie soll auf das menschliche Auge gemacht werden, dessen Kenntniss nothwendig ist für das Studium eines jeden optischen Instrumentes.

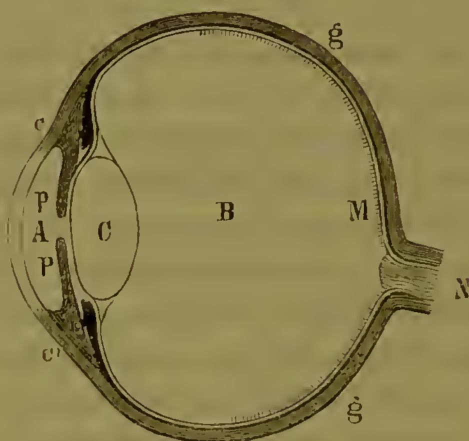
Wir werden das Auge ausschliesslich als dioptrisches System in Betracht ziehen und uns daher nur mit jenen Theilen dieses Organes beschäftigen, die unter diesem Gesichtspunkte grössere Wichtigkeit besitzen. Unter Beschränkung auf diese optisch wichtigen Theile, ist ein horizontaler Durchschnitt des Auges in Figur 20 dargestellt.

Der ganze dioptrische Theil des Sehorganes ist eingeschlossen in eine kugelförmige Hülle $gcc'g'$, deren Wandung durch die Flüssigkeit die sie vollständig ausfüllt, gegen äusseren Druck gespannt erhalten wird. Diese Wandung besteht aus mehreren Schichten. Der dichtere Theil, welcher in der Figur schraffirt ist, wird gebildet von einer widerstandsfähigen und undurchsichtigen Membran, die Sehnenhaut (sclerotica) genannt, welche dem Auge seine abgerundete Form gibt. Nur in dem vorderen Theile, zwischen den Punkten c und c' wird sie ersetzt durch die durchsichtige Hornhaut (cornea), eine vollkommen durchsichtige Membran, von der Form einer Callotte die einen kleineren Krümmungsradius als die Sclerotica hat, und durch welche das Licht in das Auge gelangt.

Innerhalb ist die Sclerotica überzogen von einer gefässreichen

Haut, welche Aderhaut (chorioidea) heisst, und die bedeckt ist von einer schwarzen, dem Pigmente der Negerhaut ähnlichen Substanz. In der Figur ist die Aderhaut durch eine schwarze Linie dargestellt. Nahe an der Vereinigungsstelle zwischen Sclerotica und Cornea macht die Aderhaut eine grosse Menge radialer Falten, die so eine Art kreisförmigen Strahlenkranzes oder Strahlenbandes (orbiculus ciliaris) bilden und die strahlenförmigen Fortsätze (processus ciliares) genannt werden. Ueber die Aderhaut breitet sich die Netzhaut (retina), eine Fortsetzung des Sehnerven *N* aus, welcher die Lichteindrücke empfängt und zum Gehirne fortleitet. Die Oberfläche dieses Nervennetzes wird von einer grossen

Fig. 20.



Zahl von Stäbchen gebildet, zwischen denen andere Stäbchen, an ihrer Basis etwas verdickt, eingestreut sind, und die man die Zäpfchen heisst. Diese sind nicht überall gleich häufig.

Am zahlreichsten sind sie im Innern eines kleinen gelben Fleckes (macula lutea), welcher nahe an der Axe der Figur, die durch die Mitten der brechenden Flächen des Auges geht, gelegen ist; das Centrum *M* des gelben Fleckes heisst die Netzhautgrube (fovea centralis). Diese Region ist die empfindlichste; in den von ihr weiter abliegenden Theilen der Retina werden die Zäpfchen allmälig seltener, die Lichtempfindlichkeit nimmt stetig ab und verschwindet ganz in der Nähe des Ursprunges der strahlenförmigen Fortsätze, wo die Retina in eine Membran übergeht, die

ganz frei ist von Nervenenden. Dem Theile, welcher dem Eintritte des Sehnerven entspricht, mangeln ebenfalls die Zäpfchen, dieser Theil ist blind und heisst der blinde Fleck oder der Mariotte'sche Fleck.

Das Innere des Auges wird durch die Krystalllinse C in zwei vollständig von einander getrennte Theile getheilt. Diese ist ein Körper von linsenförmiger Gestalt mit convexen Oberflächen und an der hinteren Fläche stärker gekrümmt als an der vorderen. Sie besteht aus verschiedenen übereinandergelagerten Schichten einer sehr durchsichtigen Substanz, von denen die innersten die härtesten und am stärksten brechenden sind. Die Krystalllinse ist eingeschlossen in eine äusserst feine durchsichtige Membran, die Linsenkapsel, mittelst welcher sie längs ihrer Peripherie mit dem Strahlenkranze zusammenhängt, der, wie wir sagten, von den Strahlenfortsätzen gebildet wird. Vor der Krystalllinse befindet sich die Iris oder Regenbogenhaut, ein ringförmiges undurchsichtiges Diaphragma, das in der Mitte eine kreisrunde Oeffnung pp, die sogenannte Pupille zeigt, und welch letztere sich unwillkürlich verengt oder erweitert, je nachdem das Auge von einer grösseren oder geringeren Lichtmenge getroffen wird.

Von den beiden Räumen A und B, in welche das Auge durch die Krystalllinse getheilt wird, ist der vordere A erfüllt von einer wasserähnlichen Flüssigkeit, die auch desshalb die wässerige Feuchtigkeit (humor aqueus) genannt wird; der rückwärtige Raum B, der die grössere Höhlung des Auges bildet enthält den sogenannten Glaskörper (humor vitreus), eine gallertartige Masse eingeschlossen in eine sehr zarte Haut, die Glashaut (hyaloidea), welche an der Retina und den hintern Theil der Linsenkapsel haftet.

Dieser Complex an durchsichtigen Körpern setzt sich zu einem convergenten dioptrischen Systeme zusammen, welches von äusseren Gegenständen die man anblickt, ein umgekehrtes Bild entwirft. Damit der Gesichtseindruck ein deutlicher sei, muss dieses Bild auf die Retina fallen und damit es die grösstmögliche Schärfe besitze, muss es im gelben Fleck gelegen sein. Fixirt man mit dem Blick einen Punkt, so fällt dessen Bild auf die Netzhautgrube.

51. Die Krümmung der Oberflächen der Krystalllinse, welche

unter den durchsichtigen Medien des Auges das brechbarste ist, kann willkürlich verändert werden, hieraus resultirt eine Lagenänderung der Hauptpunkte des Auges, sodass auf die Retina die zu verschieden entfernten Punkten gehörigen conjugirten Punkte fallen können, und zwar von um so entfernteren Punkten, je kleiner jene Krümmung ist. So wird es möglich, dass ein Auge in sehr verschiedene Entfernungen deutlich sehen kann. Diese Aenderung des Auges mit der Entfernung der gesehenen Objecte nennt man seine Accommodation.

Das Vermögen des Auges, sich auf verschiedene Entfernungen zu accommodiren ist begrenzt. Stellt man sich vor, dass der Durchkreuzungspunkt der Einfallsgeraden verschoben werde längs der Axe des Auges, diese nach beiden Seiten bis ins Unendliche verlängert gedacht, so wird man finden, dass sein conjugirter Punkt vermittelst der Accommodation nur dann auf die Retina gebracht werden kann, wenn jener innerhalb einer gewissen Strecke gelegen ist, deren Länge die Weite der möglichen Accommodation misst. Die dem Auge näherliegende Grenze dieser Strecke nennt man den Nahepunkt (punctum proximum), die entferntere den Fernpunkt (punctum remotum). Um auf die Entfernung des Fernpunktes zu sehen ist keine Anstrengung durch Accommodation nothwendig, das Auge befindet sich in Ruhe; fixirt man hingegen den Nahepunkt, so erfordert diess die grösste Anstrengung.

Die Länge der genannten Strecke ist verschieden für verschiedene Individuen.

Man betrachtet den Fernpunkt als normal gelegen, wenn er sich im Unendlichen befindet, und nennt jenes Auge normal, das ohne Accommodations-Anstrengung die Strahlen in einem Punkte der Retina vereinigt, welche parallel zu einander einfallen, das Auge also, dessen zweiter Brennpunkt bei ruhendem Auge auf der Retina liegt. Augen, welche diese Eigenschaft haben, nennt Donders emmetropisch, alle anderen, für welche der Fernpunkt in endlicher Entfernung sich befindet, ametropisch.

Der Fernpunkt kann in endlicher Entfernung vor oder hinter dem Auge liegen. Im ersten Falle ist das Auge brachymetrop, im zweiten hypermetrop. Für ein brachymetropes Auge

fällt, ohne Accommodations-Anstrengung, das Bild von Gegenständen auf die Retina, die sich in einer bestimmten endlichen, mitunter sehr kleinen Entfernung befinden; und da durch die Accommodation der Punkt, dessen conjugirter auf der Retina liegt, dem Auge nur genähert, aber nicht von demselben entfernt werden kann, so wird ein solches Auge ohne Hilfe eines Instrumentes nicht über jene bestimmte Entfernung hinaus deutlich sehen. In einem brachymetropen Auge können sich die gebrochenen Strahlen nur dann auf der Retina schneiden, wenn die einfallenden divergiren; der zweite Brennpunkt liegt, auch im Ruhezustande, vor der Retina. Ein hypermetropes Auge hingegen sieht ohne accommodiren zu müssen nur dann deutlich, wenn zwischen dem leuchtenden Punkt und dem Auge ein Instrument eingeschaltet wird, das die von dem Punkte ausgehenden Strahlen convergent zu machen geeignet ist; ohne Accommodation kann es reelle Gegenstände nicht sehen, sondern nur Bilder, die, wenn das Auge die Lichtstrahlen nicht auffinge, hinter demselben zu Stande kämen und zwar in einer um so kleineren Entfernung je hypermetropischer das Auge ist: der zweite Brennpunkt liegt für ein solches im Ruhezustand befindliches Auge hinter der Retina.

Der Nahepunkt ist für ein normales emmetropisches Auge 20 bis 30 Centimeter entfernt, für ein brachymetropes Auge liegt er gewöhnlich näher, für ein hypermetropes weiter. Das Intervall zwischen den beiden Punkten, welche die Strecke für die ein Auge fähig ist zu accommodiren begrenzen, wird demnach sehr verschieden sein für verschiedene Individuen; es ist unendlich für das emmetrope Auge. es besteht für ein hypermetropes aus zwei ins Unendliche verlaufenden Strecken, die eine vor, die andere hinter dem Auge gelegen und es ist endlich, oft sehr kurz, nur einige Decimeter lang, für ein brachymetropes Auge. Man darf übrigens nicht glauben, dass diese Verschiedenheit der Accommodationsweite abhängt von einer Verschiedenheit in dem Vermögen des Auges, durch seine Aenderung seine Fundamentalpunkte zu verschieben; sie hängt vielmehr damit zusammen, dass einer und derselben Verschiebung des leuchtenden Punktes eine grosse Verschiebung seines conjugirten Punktes entspricht, wenn der leuchtende Punkt sehr nahe, und eine unmerkliche, wenn dieser

sehr entfernt ist. Wenn man durch eine Linse ein brachymetropes Auge corrigirt, so dass sein Fernpunkt ins Unendliche rückt, so wird sein Nahepunkt in einer grösseren Distanz als der für ein normales metropes Auge liegen.

Bei demselben Individuum ändert sich das Intervall zwischen dem Nahe- und Fernpunkt mit dem Alter, eine Zunahme dieses ist von einer Abnahme jenes Intervalles begleitet, indem der Nahepunkt in grössere Entfernung rückt.

Will man Objecte von kleinen Dimensionen beobachten, so nähert man sie natürlich dem Auge so viel als möglich; auf diese Weise werden ihre Bilder auf der Retina grösser und die feineren Details derselben können besser unterschieden werden. Aus diesem Grunde hat man auch die Entfernung des Nahepunktes weniger zutreffend die deutliche Sehweite genannt. Für das normale Auge ist diese Distanz eine solche, dass man in derselben bequem kleinere Objecte, die man betrachten will, halten kann, und diese, wenn es künstliche sind wie Lettern, Linien einer Zeichnung u. s. w. pflegen Dimensionen zu haben, geeignet, um sie in jener Entfernung ohne Mühe sehen zu können. Solche, für die der Nahepunkt beträchtlich weiter entfernt ist, als die normale deutliche Sehweite beträgt, können nicht gut und bequem die genannten Objecte sehen, sie können nicht lesen oder schreiben ohne Hilfe von Linsen.

Es gibt also zwei Fälle, in denen es nöthig wird das Auge mit Linsen zu versehen: wenn ein Brachymetropischer weit entfernte Gegenstände sehen will und wenn der Nahepunkt sehr weit liegt und kleine Objecte beobachtet werden sollen. Im ersten Falle pflegt man das Auge kurzsichtig (myop), im zweiten weitsichtig (presbyop) zu nennen. Die Kurzsichtigen sind alle brachymetropisch; die Weitsichtigen sind aber nicht immer hypermetropisch. Ein emmetropes und normales Auge wird mit zunehmenden Alter gewöhnlich kurzsichtig.

55. Das schematische Auge. Aus der gegebenen Beschreibung und den Andeutungen über die Funktion des Auges geht hervor: 1. Dass dieses ein System sehr zahlreicher brechender Medien ist, nämlich der durchsichtigen Hornhaut, der wässerigen Feuchtigkeit, der vielen Schichten der Krystalllinse und des Glas-

körpers; 2. dass einige der Trennungsflächen dieser Medien von veränderlicher Form sind. Man weiss überdiess, dass diese Oberflächen keine Kugelflächen sind, sondern nur angenähert Rotationsflächen, deren Axen nicht vollkommen coincidiren.

Für unseren Zweck jedoch können wir ohne erheblichen Fehler den Einfluss der Cornea vernachlässigen, da sie sehr dünn ist und einen von dem der wässerigen Feuchtigkeit nur wenig verschiedenen Brechungsindex hat; ferner der Krystalllinse, die in Wirklichkeit aus vielen Schichten zusammengesetzt ist, einen gleich geformten homogenen Körper mit geeignetem Brechungsindex substituirt denken; wir können ferner annehmen, dass die Trennungsflächen eine unveränderliche Form und zwar jene haben, die einem normalen, auf sehr grosse Distanzen accommodirtem Auge entsprechen; endlich können wir alle diese Flächen als sphärisch und centrirt voraussetzen, so dass die Gerade durch die Mittelpunkte mit der Axe der ersten Oberfläche, d. i. der Cornea, zusammenfällt. Diese Gerade, welche wir die Axe des Auges nennen werden, geht nicht genau durch die Netzhautgrube, liegt ihr aber sehr nahe.

Das so vereinfachte Auge wird das schematische Auge genannt. Es ist nichts anderes als ein centrirtes dioptrisches System mit nur drei Trennungsflächen, der vorderen Fläche der Cornea und der beiden Flächen der Krystalllinse und diese Flächen trennen vier Medien von einander: die Luft, die wässerige Feuchtigkeit, die Krystalllinse und den Glaskörper. Auf ein solches System lässt sich die im ersten Theil auseinandergesetzte Theorie leicht anwenden.

Für das von Listing angegebene schematische Auge hat man mit Berücksichtigung der von Wüllner vorgenommenen Aenderungen die folgenden Daten:

Entfernung

zwischen der 1. und 2. Oberfläche . .	3·78 mm.
„ „ 2. „ 3. „ . .	4·00 „

Krümmungsradius

der 1. Oberfläche	+ 7·80 mm.
„ 2. „	+ 9·58 „
„ 3. „	— 5·87 „

Brechungsindex

der Luft . . . . 1·0000 mm.
der wässerigen Feuchtigkeit . . . . . . 1·3465 „
der Krystalllinse . . . . 1·4545 „
des Glaskörpers . . . . 1·3465 „

Durch diese Angaben ist das dioptrische System vollständig bestimmt.

Die Lage seiner Fundamentalpunkte könnte man graphisch mit genügender Genauigkeit bestimmen, indem man auf einer Geraden, welche die Augenaxe vorstellt, die Entfernungen und Krümmungsradien nach einem Massstabe aufträgt, der das 5- bis 6fache des wirklichen ist, die Tangentenebenen an die Trennungsflächen verzeichnet und mit dieser Figur weiter operirt, wie im Artikel 42 angegeben wurde.

Wir wollen dieselbe Bestimmung mit Hilfe der Rechnung ausführen und können dann wie folgt verfahren:

a) Durch Anwendung der Gleichungen

$$f = -\frac{nr}{n' - r} \quad \text{und} \quad f' = \frac{n'r}{n' - n}$$

des Artikels 18 berechnen wir die Lage der Brennpunkte für die drei einfachen Systeme, die gebildet werden: 1. durch die Luft und die wässrige Feuchtigkeit, von einander getrennt durch die Oberfläche der Cornea; 2. durch die wässrige Feuchtigkeit und die Krystalllinse, von einander getrennt durch die vordere Fläche der letzteren; 3. durch die Krystalllinse und dem Glaskörper, durch die hintere Fläche der ersteren von einander getrennt.

b) mit Hilfe der Formeln

$$F'F = \frac{f_1 f_1'}{D} \quad \ldots (1), \qquad F_2' F' = -\frac{f_2 f_2'}{D} \quad \ldots (2),$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{D} \quad \ldots (3), \qquad f' = -\frac{f_1' f_2'}{D} \quad \ldots (4)$$

des Artikels 43 berechnen wir die Lage der Fundamentalpunkte des aus dem zweiten und dritten der oben genannten einfachen Systeme zusammengesetzten Systemes, das also aus der wässrigen Feuchtigkeit, der Krystalllinse und dem Glaskörper gebildet wird.

c) Endlich bestimmen wir durch dieselben Formeln die Fundamentalpunkte des aus dem Systeme b) und dem ersten der drei einfachen Systeme a) bestehenden Systemes. Dieses zusammengesetzte System ist das Auge selbst.

Es folgt hier die Ausführung dieser Rechnungen.

a) Systeme von zwei Medien:

1. *Luft und wässrige Feuchtigkeit:*

$$\text{Erste Brennweite} = -\frac{7{\cdot}80 \text{ mm.}}{1{\cdot}3465-1} = -22{\cdot}5108 \text{ mm.},$$

$$\text{Zweite „} = +\frac{1{\cdot}3465\times 7{\cdot}80}{1{\cdot}3465-1} = +30{\cdot}3108.$$

Dieses sind die Entfernungen der beiden Brennpunkte vom Scheitel der Cornea, auf welchen wir die Lagen aller übrigen Punkte beziehen wollen.

2. *Wässrige Feuchtigkeit und Krystalllinse:*

$$\text{Erste Brennweite} = -\frac{1{\cdot}3465\times 9{\cdot}51}{1{\cdot}4545-1{\cdot}3465} = -118{\cdot}5668,$$

$$\text{Zweite „} = +\frac{1.4545\times 9.51}{1{\cdot}4545-1{\cdot}3465} = +128.0767.$$

Entfernung des ersten Brennpunktes vom Scheitel der Cornea

$$= 3{\cdot}78 - 118{\cdot}5668 = -114{\cdot}7868,$$

ebenso für den zweiten Brennpunkt

$$= 3{\cdot}78 + 128{\cdot}0767 = +131{\cdot}8567.$$

3. *Krystalllinse und Glaskörper:*

$$\text{Erste Brennweite} = -\frac{1.4545\times(-5{\cdot}87)}{1{\cdot}3465-1{\cdot}4545} = -79{\cdot}0548,$$

$$\text{Zweite „} = +\frac{1{\cdot}3465\times 5{\cdot}87}{1{\cdot}4545-1{\cdot}3465} = +73{\cdot}1848.$$

Entfernung des ersten Brennpunktes vom Scheitel der Cornea

$$= 3{\cdot}78 + 4 - 79{\cdot}0548 = -71{\cdot}2748,$$

ebenso für den zweiten Brennpunkt

$$= 7{\cdot}78 + 73.1848 = +80{\cdot}9648.$$

b) Combination des zweiten der vorhergehenden Systeme mit dem dritten, oder das System: wässrige Feuchtigkeit, Krystalllinse, Glaskörper.

$$D = -71{\cdot}2748 - 131{\cdot}8567 = -203{\cdot}1315,$$

$$F_1F = \frac{-118{\cdot}5668 \times 128{\cdot}0767}{-203{\cdot}1315} = +74{\cdot}7577.$$

Entfernung des ersten Brennpunktes vom Scheitel der Cornea

$$= -114{\cdot}7868 + 74{\cdot}7577 = -40{\cdot}0291,$$

$$F_2'F' = -\frac{-79{\cdot}0548 \times 73{\cdot}1848}{-203{\cdot}1315} = -28{\cdot}4820.$$

Entfernung des zweiten Brennpunktes vom Scheitel der Cornea

$$= 80{\cdot}9648 - 28{\cdot}4820 = +52{\cdot}4828.$$

$$\text{Erste Brennweite} = \frac{-118{\cdot}5668 \times (-79.0548)}{-203{\cdot}1315} = -46{\cdot}1438,$$

$$\text{Zweite Brennweite} = -\frac{128{\cdot}0767 \times 73{\cdot}1848}{-203{\cdot}1315} = +46{\cdot}1438.$$

c) Combination des Systemes b) mit dem ersten der Systeme a), oder das vollständige Auge:

$$D = -40{\cdot}0291 - 30{\cdot}3108 = -70{\cdot}3399,$$

$$F_1F = \frac{-22{\cdot}5108 \times 30{\cdot}3108}{-70.3399} = +9{\cdot}7013,$$

$$F_2'F' = -\frac{(46{\cdot}1438)^2}{70{\cdot}3399} = -30{\cdot}2709.$$

$$\text{Erste Brennweite} = \frac{-22{\cdot}5108 \times (-46{\cdot}1438)}{-70{\cdot}3399} = -14{\cdot}7673,$$

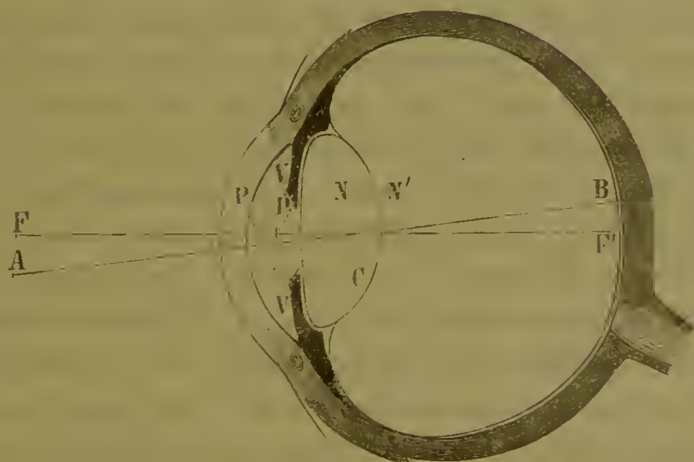
$$\text{Zweite Brennweite} = -\frac{30{\cdot}3108 \times 46{\cdot}1438}{-70.3399} = +19{\cdot}8843.$$

Mit Hilfe dieser Resultate berechnen sich schliesslich die folgenden Entfernungen der Fundamentalpunkte des Auges von der ersten Oberfläche der Cornea:

Erster Brennpunkt:	— 22·5108 + 9·7013 = — 12·8095	mm.
Zweiter Brennpunkt:	52·4828 — 30·2709 = + 22·2119	„
Erster Hauptpunkt:	— 12·8095 + 14·7673 = + 1·9578	„
Zweiter Hauptpunkt:	+ 22·2119 — 19·8843 = + 2·3276	„
Erster Knotenpunkt:	— 12·8095 + 19·8843 = + 7·0748	„
Zweiter Knotenpunkt:	22·2119 — 14·7673 = + 7·4446	„

Die Entfernung zwischen den beiden Hauptpunkten und den beiden Knotenpunkten beträgt 0·3698 mm.

Fig. 21.



Die Figur 21 zeigt in doppelter natürlicher Grösse einen horizontalen Durchschnitt des schematischen Auges mit seinen Fundamentalpunkten: F und F' sind die beiden Brennpunkte, P und P' die beiden Hauptpunkte und NN' die beiden Knotenpunkte.[1])

1) Zwei der Distanzen, die wir gefunden haben, unterscheiden sich von jenen, zu denen Wüllner, von denselben Daten ausgehend, gelangt. Dieser, wie auch Jene die nach ihm geschrieben haben, geben für die Entfernungen des ersten Brennpunktes und des ersten Hauptpunktes von der Vorderfläche der Hornhaut die folgenden Werthe

— 12·836 mm. und 1·931 mm.,

die von den oben gefundenen beiläufig um 0·027 mm. differiren. Der Grund hierfür liegt in einem Rechenfehler, den Wüllner begeht; wir finden in der That in seinem Lehrbuch der Experimentalphysik 2. Bd. 3. Auflage, Leipzig 1871, pag. 289 die Gleichung

$$\frac{7·8}{0·3465} = 22·22,$$

welche richtig lauten sollte:

$$\frac{7·8}{0·3465} = 22·5108.$$

Sind diese Punkte einmal bekannt, so gestatten die in den Artikeln 37 und 38 dargelegten Regeln die Bilder von Punkten, die nahe an der Axe liegen, im Auge zu bestimmen. Setzt man den leuchtenden Punkt in jener Entfernung gelegen voraus, für welche das Auge accommodirt ist, so wird die Construction seiner Bilder ungemein einfach: es genügt vom leuchtenden Punkte aus die Gerade AN zum ersten Knotenpunkte und vom zweiten Knotenpunkte die Gerade $N'B$ parallel zu AN zu ziehen; der Punkt B, in welchem $N'B$ die Retina schneidet, ist der gesuchte Punkt.

Wenn man einen leuchtenden Punkt fixiren will, dreht man das Auge bis die Gerade $N'B$ durch die Netzhautgrube geht oder, bis die Gerade, welche durch den betrachteten Punkt und den ersten Knotenpunkt des Auges geht, parallel wird zur Geraden, die den zweiten Knotenpunkt mit der Netzhautgrube verbindet.

56. Das reducirte Auge. Wir haben gesehen (40), dass einem beliebigen centrirten dioptrischen Systeme, in welchem die beiden äussersten Medien nicht denselben Brechungsindex haben, ein System substituirt werden kann, das nur aus den beiden äussersten Medien, von einander durch eine sphärische Fläche getrennt, besteht, die ihren Scheitel im ersten Hauptpunkte und ihren Krümmungsmittelpunkt im ersten Knotenpunkt hat. Ein solches nur aus zwei Medien bestehende System gibt zu jedem einfallenden Strahl oder zu jedem leuchtenden Punkte einen austretenden Strahl oder einen conjugirten Punkt, welche parallel der Axe um eine Strecke gleich der Distanz zwischen den beiden Hauptpunkten verschoben mit jenen zusammenfallen, welche das vorgelegte zusammengesetzte System liefern würde. Diesen Satz können wir auf das schematische Auge anwenden. Wir haben uns dann den drei Trennungsflächen des Auges eine einzige sphärische Trennungsfläche substituirt zu denken, die ihren Scheitel im ersten Hauptpunkte P (Fig. 21) und das Centrum im ersten Knotenpunkt N hat, und vorauszusetzen, dass zur Linken dieser Fläche Luft, zur Rechten die Substanz des Glaskörpers sich befindet; sodann hat man die von diesem einfachen Systeme erzeugten Bilder nur um eine Strecke gleich PP' parallel der Axe zu verschieben, um die Bilder zu erhalten, die das schematische Auge wirklich auf der Retina oder nahe derselben entwirft.

Die Strecke $PP' = NN'$, um welche man die von der einzigen durch P gehenden Fläche erzeugten Bilder verschieben muss, um sie mit den vom Auge entworfenen zusammenfallen zu machen, ist sehr klein, sie übersteigt nach der oben ausgeführten Rechnung nur wenig ein Dritttheil eines Millimeters. Diese Bemerkung führt zu einer weiteren Vereinfachung des Auges. Diese schon von Listing vorgeschlagene Vereinfachung besteht darin, dass den beiden Hauptpunkten PP' ein einziger in der Mitte der Strecke PP' gelegener Punkt und in gleicher Weise den beiden Knotenpunkten N und N' ein einziger Punkt C in der Mitte zwischen beiden substituirt wird. Das dioptrische System reducirt sich so auf ein System bestehend aus zwei Medien, der Luft und der Glaskörpersubstanz, die durch eine sphärische Fläche VV mit dem Centrum in C von einander getrennt sind. Die von dieser einzigen Oberfläche hervorgebrachten Bilder unterscheiden sich von denen des Auges um Grössen, die in der That in den meisten Anwendungen vernachlässigt werden können.

Dieses System von zwei Medien, das wie ein dioptrisches Instrument an Stelle des Auges gesetzt werden kann, wurde von Listing das reducirte Auge genannt. In der Figur 21 ist die brechende Fläche des reducirten Auges durch einen punktirten Bogen VV dargestellt; sie ist 2·143 mm. hinter der Vorderfläche der Hornhaut gelegen. Der Mittelpunkt C dieser Fläche heisst Mittelpunkt oder Kreuzungspunkt des Auges; er liegt 7·260 mm. hinter der Vorderfläche der Cornea und 0·520 mm. vor der hintern Fläche der Krystalllinse.

Für das reducirte Auge wird die Bestimmung des zu einem leuchtenden Punkte gehörigen Bildes äusserst einfach; man hat nur die Gerade zu ziehen, welche den gegebenen Punkt mit dem Centrum C verbindet und dieselbe bis zum Durchschnitt mit der Retina zu verlängern; der Schnittpunkt ist das gesuchte Bild. Ein leuchtendes Object und sein Bild sind homothetisch oder perspektivisch bezüglich des Mittelpunktes C; die Grösse des Bildes verhält sich zu der des Objectes wie die Länge CF' zur Entfernung des Objektes vom Mittelpunkt C.

Wenn man einen Punkt durch den Blick fixirt, so geht die

Gerade AC verlängert durch die Netzhautgrube; will man daher ein Object fixiren, so wendet man das Auge bis diess eintritt, das heisst bis die Gerade CB, welche das Centrum C mit der Netzhautgrube verbindet, durch den betrachteten Punkt geht. Daher nennt man diese Gerade die Gesichtslinie. Helmholtz hat nachgewiesen, dass die Gesichtslinie nicht mit der Centralaxe des Auges oder der Augenaxe zusammenfällt; der gelbe Fleck liegt nämlich mehr gegen die Schläfenseite zu als der Brennpunkt F'.

Die Ebene der Pupille liegt, wie die Figur 21 zeigt, hinter der brechenden Fläche des reducirten Auges; aber für die Anwendung ist es bequemer, die Pupille auf der brechenden Fläche selbst gelegen anzunehmen. Unter dem Durchmesser der Pupille werden wir dann den Durchmesser des Kreises verstehen, in welchem die brechende Fläche von dem Kegel geschnitten wird, dessen Spitze im Punkte C liegt und dessen Directrix die Peripherie der wirklichen Pupille ist.

57. Das Urtheil, welches wir uns über gesehene Gegenstände bilden, hängt von den Bildern ab, die diese im Auge erzeugen; und in der That, wenn wir an Stelle der Objecte, die durch optische Instrumente hervorgebrachten oder sonstige Bilder setzen, die im Auge dieselben Bilder geben wie die Objecte selbst, so glauben wir dieselben wirklich zu sehen.

Für die Untersuchung der optischen Instrumente erscheint es nothwendig, dass wir noch kurz und nur vom dioptrischen Gesichtspunkte aus erörtern: 1. wie man die Grösse der gesehenen Objekte beurtheilt; 2. von welchen Bedingungen die Helligkeit des Gesichtseindruckes abhängt.

Die Schätzung der Grösse geschieht durch die Grösse des auf der Retina entworfenen Bildes. Ist nun das Object einfach ein Stück einer zur Augenaxe senkrechten Geraden oder betrachtet man von einem Objecte nur die eine Dimension, so hängt die Grösse des Bildes auf der Retina nur von dem Winkel ab, den die beiden zu den Grenzpunkten gezogenen Gesichtslinien mit einander bilden. Diesen Winkel nennt man den Sehwinkel oder auch die scheinbare Grösse des Objectes.

Die scheinbare Grösse ist jedoch nicht blos durch die wahre

Grösse des Objectes bestimmt, sondern auch durch die Entfernung desselben vom Auge; setzt man an Stelle des Sehwinkels seine Tangente, so wird die scheinbare Grösse gleich sein dem Quotienten aus der wahren linearen Grösse getheilt durch die Entfernung. Um also die wahre Grösse beurtheilen zu können, ist es nöthig, die Entfernung zu kennen. Ist diese bekannt, so geschieht die Schätzung gleichsam ohne sich der Entfernung recht bewusst zu werden durch die aus der Uebung erlangte Fähigkeit. Schliesst man aber auf die Entfernungen durch das Gefühl der grösseren oder geringeren Convergenz der beiden Augenaxen, aus dem Bewusstwerden der nothwendigen Anstrengung durch die Accommodation oder aus dem Effect der Luftperspective, welcher darin besteht, dass die Helligkeit der Objecte abnimmt mit dem Wachsen ihrer Entfernung, dann wird das Urtheil unsicher sein und kann unrichtig ausfallen, wenn die Distanzen ganz unbekannt sind. Dass in Wirklichkeit die Schätzung der Grösse von einem oft complicirten psychischen Acte abhängt, beweisen die häufigen Täuschungen, zu denen wir veranlasst werden, theils ohne künstliche Hilfsmittel, wenn wir z. B. Objecte betrachten, die ausserhalb der engen Grenzen des Theiles der Erdoberfläche liegen, an dem wir unseren Gesichtssinn geübt und gewöhnt haben, oder Objecte, deren Grösse die gewöhnliche weit übertrifft; theils auch durch künstliche Mittel, wie bei den Phantasmagorieen.

58. Die Helligkeit des Gesichtseindruckes hängt von einer Mehrheit von Umständen ab, die wir hier nicht erörtern können. Sehen wir aber ab von dem Einflusse, welchen auf die Intensität der Empfindung die Farbe des Lichtes hat, von dem Einflusse der Farbe und Helligkeit der dem betrachteten Objecte benachbarten Gegenstände und von den physiologischen Zuständen des Sehorganes, betrachten wir demnach die Helligkeit nur insofern als sie abhängig ist von der Grösse und der Entfernung des gesehenen Objectes und von der Lichtmenge, die dasselbe in das Auge sendet, dann können wir es als evident betrachten, dass die Helligkeit des Gesichtseindruckes um so grösser ist, je grösser die Lichtmenge ist, die auf jede Flächeneinheit des Bildes fällt, das sich vom Objecte auf der Retina bildet. —

Die Intensität der Empfindung ist nicht proportional der genannten Grösse; aber unter sonst gleichen Umständen wächst sie mit dieser, die man auch als physische Helligkeit bezeichnen könnte. Sie allein haben wir nöthig zu betrachten und werden sie die Helligkeit nennen.

Es folgt somit die Regel: um die Helligkeit zu finden, dividire man die ganze Lichtmenge, die in das Auge tritt, durch die Fläche des auf der Retina erzeugten Bildes.

Wenn zwischen dem betrachteten Objecte und dem Auge kein absorbirendes Medium sich befände, so wäre die Helligkeit unabhängig von der Entfernung des Objectes. Stellt man sich in der That ein leuchtendes Object vor, von dem jede Flächeneinheit auf die Flächeneinheit in der Distanz Eins die Lichtmenge J sendet; ist die Oberfläche dieses Objectes S, seine Entfernung von der Pupille d und die Fläche der Pupille selbst ω, so wird die Lichtmenge, welche vom Object ausgegangen in das Auge dringt, durch den Ausdruck gegeben sein

$$\frac{JS\omega}{d^2}.$$

Ist dann s die Fläche des Bildes des Objectes, so ist die Helligkeit

$$C = \frac{JS\omega}{d^2 s}.$$

Wenn jedoch, wie diess immer zutrifft, das Object sich genügend weit vom Auge befindet, so dass es gleichgiltig ist, ob man unter d die Entfernung von der Pupille oder vom Mittelpunkt des Auges versteht, so haben wir (55)

$$\frac{S}{s} = \frac{d^2}{\delta^2},$$

wobei δ die Entfernung des Mittelpunktes des Auges von der Retina bedeutet. Hieraus folgt aber

$$C = \frac{J\omega}{\delta^2} = \text{const.}$$

Dessen ungeachtet würde ein Object, über eine gewisse Grenze hinaus entfernt, aufhören sichtbar zu sein, auch wenn sich zwischen diesem und dem Auge kein lichtabsorbirendes Medium befände; denn damit ein Object gesehen werden könne, darf der Sehwinkel nicht unter eine gewisse Grenze herabsinken, die noch von der Helligkeit und Farbe des Objectes, von der Helligkeit und Farbe des Hintergrundes, auf welchem sich das Object projicirt und von dem Zustande des Auges abhängt. Für ein gewöhnliches Auge erscheinen zwei Punkte noch getrennt, wenn sie unter einem Sehwinkel von 1′ gesehen werden, so dass die Entfernung ihrer Bilder auf der Retina beiläufig 0·0043 mm. betragen würde. Bei entsprechender Beleuchtung kann aber ein Object noch unter einem Winkel von nur 30″ und sogar noch unter einem viel geringeren gesehen werden, wenn sich dasselbe auf dunklem Hintergrunde befindet; umgekehrt erfordert ein dunkles Object auf hellem, wenig erleuchteten Hintergrunde, wie z. B. ein Theil einer Zeichnung, um ohne Anstrengung gesehen zu werden einen Sehwinkel von 2′ und darüber.

ZWEITES KAPITEL.

Linsen und Linsensysteme.

§ 1. *Allgemeine Eigenschaften.*

59. Unter einer Linse versteht man ein aus drei Medien gebildetes centrirtes System, in welchem die beiden äussersten Medien identisch sind; in dem gewöhnlichen Falle sind die beiden äusseren Medien die Luft und das zwischenliegende Medium ist Glas oder ein anderer durchsichtiger Körper, der das Licht stärker bricht als die Luft.

Die in den Artikeln (34) und (35) bewiesenen Sätze zeigen sofort dass:

1. die beiden Brennweiten einer Linse ihrem absoluten Werthe nach einander gleich sind;

2. die Knotenpunkte einer Linse mit den Hauptpunkten zusammenfallen.

Eine Linse ist demnach durch die vier Fundamentalpunkte F, P, F', P', (Fig. 22) definirt, die so angeordnet sind, dass $FP = P'F'$ ist.

Gleiches gilt für ein System von Linsen.

Fig. 22.

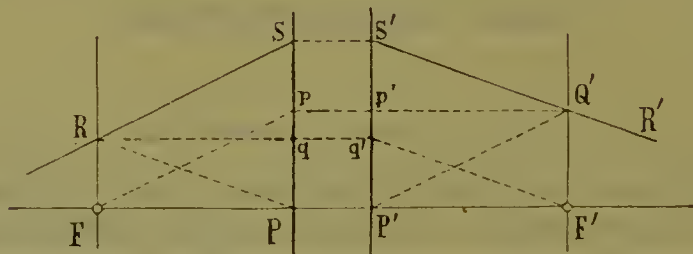


60. Die im Artikel 37 für ein beliebiges System gezeigten Constructionen, reduciren sich für den speziellen Fall einer Linse oder eines Systemes von Linsen auf die folgenden.

Aufgabe 1. Es ist gegeben eine Linse oder ein System von Linsen, man soll zu einer gegebenen Einfallsgeraden die entsprechende Austrittsgerade finden.

Ist (Fig. 23) RS die gegebene Einfallsgerade und SS' parallel zur Axe, so wird die gesuchte Austrittsgerade durch S' gehen. Um sie vollständig zu bestimmen, kann man auf eine der folgenden Arten verfahren.

Fig. 23.



1. Man ziehe Rqq' parallel zur Axe und $q'F'$ durch den zweiten Brennpunkt, die gesuchte Gerade $S'R'$ wird parallel sein zu $q'F'$.

2. Man ziehe Fp parallel zu RS und $pp'Q'$ parallel zur Axe, die gesuchte Gerade geht durch Q'.

3. Man ziehe RP; die gesuchte Gerade $S'R'$ ist parallel zu dieser.

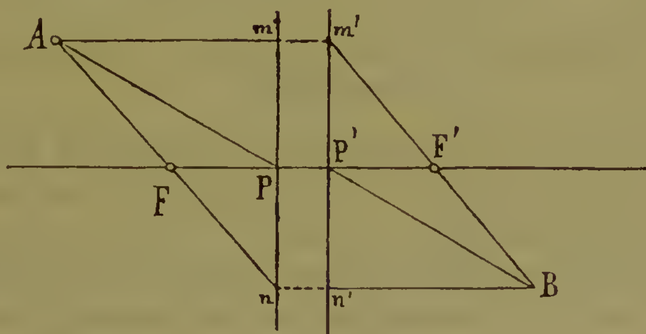
4. Die gesuchte Gerade muss durch den Punkt Q' gehen, in

welchem die zweite Brennebene von der durch P' zur gegebenen Geraden parallel gezogenen Geraden $P'Q'$ geschnitten wird.

Anmerkung. Die beiden Dreiecke RSP, $Q'P'S'$ sind gleich. Verschiebt man das zweite derselben nach links, bis $S'P'$ mit SP zusammenfällt, so bilden sie zusammen ein Parallelogramm, in welchem SP eine Diagonale ist; die andere Diagonale schneidet diese in ihren Mittelpunkt. Die Gerade also, welche R mit dem Mittelpunkte des Segmentes SP verbindet, ist gleich und parallel jener, die den Mittelpunkt des Segmentes $S'P'$ mit Q' verbindet.

Aufgabe 2. Es ist gegeben eine Linse oder ein System von Linsen, man soll zu einem gegebenen leuchtenden Punkt den conjugirten finden.

Fig. 24.



Ist (Fig. 24) A der gegebene leuchtende Punkt, zieht man Amm' parallel zur Axe und durch m' die Gerade $m'F'$; zieht man in ähnlicher Weise AFn und durch n die Gerade $nn'B$ parallel zur Axe; dann ist der Punkt B, in dem diese Gerade von $m'F'$ geschnitten wird, der gesuchte Punkt.

Oder, man ziehe AP und durch P' eine Parallele zu ihr; diese Parallele schneidet $m'F'$ und auch nn' in dem gesuchten Punkte B.

Anmerkung. Denkt man sich den Theil $n'P'm'F'B$ der Figur nach links verschoben, bis $n'P'm'$ mit nPm zusammenfällt, so wird $P'B$ die Verlängerung von AP. Nach dieser Verschiebung liegen also zwei conjugirte Bilder perspectivisch bezüglich des Punktes P.

61. Wenn man mit φ den Werth der zweiten Brennweite bezeichnet, so wird die erste Brennweite $-\varphi$ sein; für Linsen

reduciren sich daher die Gleichungen (I'), (II''), (II') und (III') des Artikels 38 auf folgende:

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\varphi}, \qquad (I')$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}, \qquad (II'')$$

$$\frac{y}{y'} = 1 + \frac{x}{\varphi}, \qquad \frac{y'}{y} = 1 - \frac{x'}{\varphi}, \qquad (II')$$

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{y'}{y} = 1 - \frac{x'}{\varphi}, \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{y}{y'} = 1 + \frac{x}{\varphi}. \qquad (III')$$

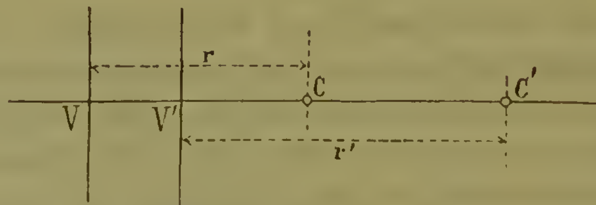
Die zweite Brennweite φ nennt man auch einfach die Brennweite der Linse oder des betrachteten Linsensystems.

§ 2. *Bestimmung der Fundamentalpunkte. Verschiedene Arten von Linsen.*

62. Um von den vorhergehenden Constructionen und Formeln Gebrauch machen zu können, ist es nöthig, die Lage der Hauptpunkte und die Brennweite der Linse zu wissen. Diese Elemente bestimmen sich aber leicht mit Hilfe der im Artikel 33 gezeigten Methode, wenn die Krümmungen und die Entfernung der beiden Linsenflächen, sowie der Brechungsindex der Substanz, aus welcher die Linse besteht, bezüglich des umgebenden Mediums gegeben sind.

Es seien (Fig. 25) V, V' die Scheitel der beiden Flächen einer Linse, C und C' die beiden Krümmungsmittelpunkte derselben,

Fig. 25.



$r = VC$, $r' = V'C'$ die beiden Krümmungsradien, n_1 der Brechungsindex des zwischen V und V' enthaltenen Mediums, der eigentlichen

Linsensubstanz, n der Brechungsindex des links von V und rechts von V' befindlichen Mediums und $\mu = \frac{n_1}{n}$ der Brechungsindex der Linsensubstanz bezüglich des umgebenden Mediums. Ferner bezeichnen wir mit $\triangle$ die Distanz VV', also die Linsendicke, mit f_1, f_1' die Brennweiten der ersten brechenden Fläche, f_2, f_2' die der zweiten, mit F_1, F_1', F_2, F_2' die bezüglichen Brennpunkte und mit φ, F, F', P, P' die Brennweite, die Brennpunkte und die Hauptpunkte der Linse.

Für die beiden einfachen Systeme, gebildet aus dem ersten und zweiten, und aus dem zweiten und dritten Medium, werden wir haben (18):

$$f_1 = -\frac{nr}{n_1 - n} = -\frac{r}{\mu - 1},$$

$$f_1' = +\frac{n_1 r}{n_1 - n} = +\frac{\mu r}{\mu - 1},$$

$$f_2 = -\frac{n_1 r'}{n - n_1} = +\frac{\mu r'}{\mu - 1},$$

$$f_2' = +\frac{n r'}{n - n_1} = -\frac{r'}{\mu - 1}.$$

Indem wir diese Werthe in die Gleichungen (8'), (5') und (7') des Art. 44 setzen und zugleich beachten, dass

$$f' = -f = \varphi$$

ist und dass die Hauptpunkte der beiden brechenden Flächen, welche die Linse einschliessen, mit den beiden Scheiteln V und V' zusammenfallen, erhalten wir:

$$\varphi = \frac{\mu r r'}{(\mu - 1)^2 \left[\triangle + \frac{\mu (r' - r)}{\mu - 1}\right]}, \tag{1}$$

$$VP = -\frac{r \triangle}{(\mu - 1)\left[\triangle + \frac{\mu (r' - r)}{\mu - 1}\right]}, \tag{2}$$

$$V'P' = -\frac{r' \triangle}{(\mu - 1)\left[\triangle + \frac{\mu (r' - r)}{\mu - 1}\right]}, \tag{3}$$

Setzt man

$$\varrho = r' - r + \frac{\mu - 1}{\mu} \triangle,$$

so lauten diese Formeln:

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \cdot \frac{r r'}{\varrho}, \qquad (1')$$

$$VP = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{r}{\varrho} \triangle, \qquad (2')$$

$$V'P' = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{r'}{\varrho} \triangle. \qquad (3')$$

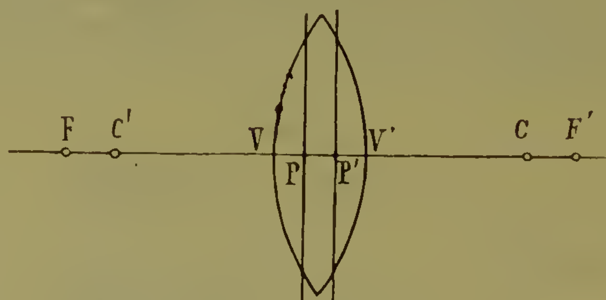
Wir bemerken hierzu 1. das VP und $V'P'$ dasselbe oder entgegengesetztes Vorzeichen haben, je nachdem die Krümmungsradien gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen; 2. dass

$$\frac{VP}{V'P'} = \frac{r}{r'}.$$

63. Die verschiedenen Arten von Linsen. Wir wollen nun die Formeln (1′), (2′) und (3′) discutiren und nachsehen, wie die Fundamentalpunkte bei den verschiedenen Linsenarten gelegen sind.

1. Biconvexlinsen. Eine Linse heisst biconvex wenn beide Oberflächen derselben convex sind. Die Fig. 26 zeigt den Schnitt einer solchen Linse mit einer durch die Axe gelegten Ebene; V, V' sind die Scheitel, C, C' die Krümmungsmittelpunkte.

Fig. 26.



Bei einer Biconvexlinse ist $r = VC$ positiv, $r' = -C'V'$ ist negativ und das Product rr' also auch negativ; die Brennweite

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \cdot \frac{r r'}{\varrho}$$

ist positiv oder negativ, je nachdem $(\mu - 1)\varrho$ negativ oder positiv ist. Setzt man demnach $\mu > 1$ voraus, wie es für die gewöhnlichen Linsen zutrifft, so ist die Linse convergent, sobald ϱ negativ ist, d. h. immer dann wenn

$$\triangle < \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

oder, indem man $-R'$ den negativen Werth von r' bezeichnet, wenn

$$\triangle < \frac{\mu}{\mu - 1}(r + R').$$

Wäre z. B. $\mu = {}^3/_2$, wie es für gewöhnliches Glas der Fall ist, so würde $\frac{\mu}{\mu - 1} = 3$, und die Linse wäre immer dann convergent, wenn ihre Dicke $\triangle$ kleiner ist als das Dreifache der arithmetischen Summe ihrer beiden Krümmungsradien. Diese Bedingung ist immer erfüllt für die gewöhnlichen Linsen, die zu unseren optischen Instrumenten verwendet werden.

Wenn

$$\triangle = \frac{\mu}{\mu - 1}(r + R')$$

ist, wird $\varrho = 0$, $\varphi = \infty$ und die Linse hat keine Fundamentalpunkte; sie stellt dann ein telescopisches System dar (46).

Wäre

$$\triangle > \frac{\mu}{\mu - 1}(r + R'),$$

somit ϱ positiv und φ negativ, so würde die Linse divergent sein.

Im Falle eines negativen ϱ, welcher der wichtigste ist, wird VP positiv und $V'P'$ negativ; P liegt also rechts von V und P' links von V'.

Als Beispiel betrachten wir den Fall, in welchem die Krümmungen der beiden Oberflächen gleich sind, so dass $r' = -r$ ist und um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, setzen wir $\mu = {}^3/_2$, wie es nahezu für gewöhnliches Glas zutrifft. Dann haben wir

$$\varrho = -2r + \frac{\triangle}{3}$$

und daher:

$$\varphi = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\frac{\triangle}{r}} r,$$

$$VP = - V'P' = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\frac{\triangle}{r}} \cdot \frac{\triangle}{3},$$

Wenn, wie es häufig vorkommt, die Linsendicke $\triangle$ sehr klein ist gegen den Krümmungsradius, so hat man angenähert

$$VP = - V'P' = \frac{\triangle}{3};$$

die beiden Hauptpunkte theilen alsdann die Linsendicke in drei gleiche Theile.

Für $\triangle = 6r$ liegen die Hauptpunkte im Unendlichen. Für $\triangle > 6r$, in welchem Falle die Linse divergent wird, ist VP negativ und $V'P'$ positiv.

Als Spezialfall betrachten wir noch eine Linse, deren beide Oberflächentheile einer und derselben Kugel angehören. Dann ist $\triangle = 2r$ und die vorhergehenden Formeln geben:

$$\varphi = \frac{3}{2} r, \qquad VP = - V'P' = r.$$

Die beiden Hauptpunkte liegen im Centrum; die Entfernung der Brennpunkte von der brechenden Kugelfläche ist

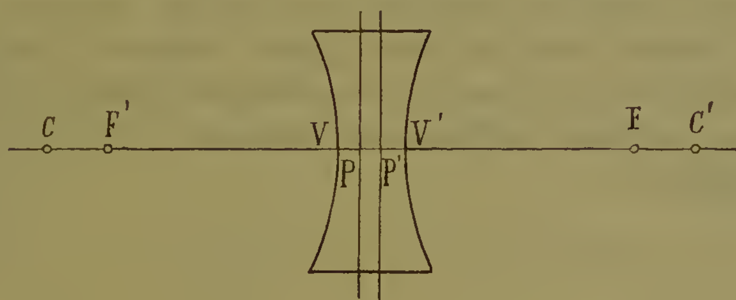
$$- r + \frac{3}{2} r = \frac{r}{2}.$$

64. Biconcavlinsen. Eine Linse heisst biconcav wenn beide Flächen derselben concav sind (Fig. 27).

Für solche Linsen ist $r = - CV$ negativ, $r' = V'C'$ positiv, das Product rr' ist negativ und ϱ positiv; hieraus folgt, dass der Werth von φ nach Gleichung (I') immer negativ ist, wenn, wie wir voraussetzen, μ grösser als Eins ist. Biconcavlinsen also, die aus einer Substanz hergestellt werden, die das Licht stärker bricht als das umgebende Medium, sind immer divergent.

Da ϱ positiv ist, so geben die Formeln (2′) und (3′) für VP und $V'P'$ Werthe, die das entgegengesetzte Vorzeichen wie r und r' haben; demnach ist VP positiv, $V'P'$ negativ, der erste Hauptpunkt P ist zur Rechten von V, der zweite Hauptpunkt P' zur Linken von V' gelegen.

Fig. 27.



Als Beispiel nehmen wir auch hier

$$r = -r', \qquad \mu = \frac{3}{2}$$

an und erhalten

$$\varphi = -\frac{1}{1 + \frac{1}{6}\frac{\triangle}{r'}} r',$$

$$VP = -V'P' = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}\frac{\triangle}{r'}} \cdot \frac{\triangle}{3}.$$

Wenn wieder $\frac{\triangle}{r'}$ klein ist, wie es in Wirklichkeit häufig zutrifft, so gibt die letzte Gleichung angenähert

$$VP = -V'P' = \frac{\triangle}{3};$$

die beiden Hauptpunkte bestimmen dann auf der Strecke VV', der Linsendicke, drei gleiche Segmente.

Lässt man $\triangle$ wachsen, so werden VP und $V'P'$ immer kleinere Bruchtheile des dritten Theiles der Dicke $\frac{\triangle}{3}$. Welchen Werth $\triangle$ auch haben mag, der erste Hauptpunkt liegt immer im ersten Dritt-

theile VP der Dicke (Fig. 27) und der zweite Hauptpunkt immer im letzten Dritttheil derselben.

In der Figur wurden auch die Brennpunkte bezeichnet; da die Linse divergent ist, so liegt immer der erste Brennpunkt zur Rechten, der zweite zur Linken derselben.

65. Planconvexlinsen. Wenn die eine Oberfläche eben, die andere convex ist, nennt man die Linse eine planconvexe.

Es können sich zwei Fälle ergeben: entweder r ist positiv, r' unendlich (Fig. 28) oder r ist unendlich und r' negativ (Fig. 29). Dividiren wir Zähler und Nenner der Ausdrücke (1), (2), (3) durch r', so erhalten wir

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \frac{r}{1 - \frac{r}{r'} + \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\triangle}{r'}},$$

$$VP = -\frac{1}{\mu} \frac{\frac{r}{r'} \triangle}{1 - \frac{r}{r'} + \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\triangle}{r'}},$$

$$V'P' = -\frac{1}{\mu} \frac{\triangle}{1 - \frac{r}{r'} + \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\triangle}{r'}},$$

welche Gleichungen für $r' = \infty$, entsprechend der Linse, die durch Fig. 28 im Durchschnitt dargestellt ist, übergehen in:

$$\varphi = \frac{r}{\mu - 1}, \qquad VP = 0, \qquad V'P' = -\frac{\triangle}{\mu}.$$

Wenn wir in ähnlicher Weise die allgemeinen Ausdrücke für φ, VP, $V'P'$ in Zähler und Nenner durch r dividiren und dann r ins Unendliche wachsen lassen, so werden diese Ausdrücke

$$\varphi = \frac{R'}{\mu - 1}, \qquad VP = \frac{\triangle}{\mu}, \qquad V'P' = 0,$$

worin R' den absoluten Werth $-r'$ des zweiten Krümmungsradius bedeutet. Diese Formeln gelten für die durch Fig. 29 dargestellte Linse.

Wir entnehmen hieraus, dass 1. wenn μ grösser als Eins ist, wie bei den gewöhnlichen Linsen, φ immer positiv bleibt; 2. $V'P'$ für die Linse, deren erste Fläche gekrümmt ist und VP für die, deren zweite Fläche die gekrümmte ist, kleiner wird als die Linsen-

Fig. 28.

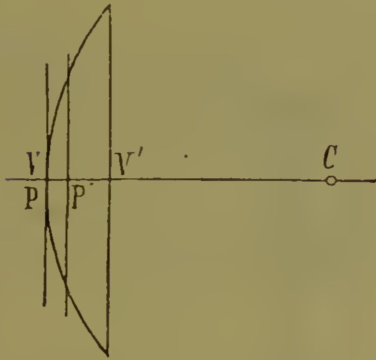
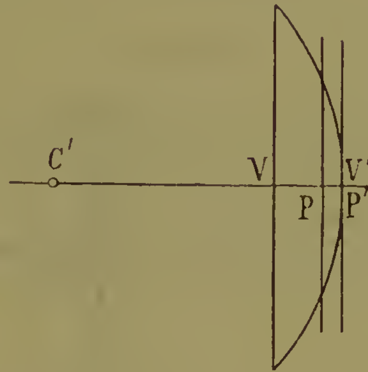


Fig. 29.



dicke. Also: 1. Die Planconvexlinsen sind immer convergent; 2. Einer der Hauptpunkte fällt immer mit dem Scheitel der convexen Oberfläche zusammen und der andere befindet sich immer innerhalb des Linsenkörpers.

Wenn wir z. B. $\mu = {}^3/_2$ voraussetzen, so haben wir für die durch Fig. 28 repräsentirte Linse

$$\varphi = 2\,r, \qquad VP = 0, \qquad V'P' = -\,{}^2/_3\,\triangle;$$

und für die durch Fig. 29 dargestellte:

$$\varphi = 2\,R' \qquad VP = {}^2/_3\,\triangle, \qquad V'P' = 0.$$

In beiden Fällen ist die Entfernung zwischen den beiden Hauptpunkten gleich einem Dritttheil von $\triangle$, wie es annäherungsweise bei biconvexen oder auch biconcaven Linsen von geringer Dicke zutrifft.

66. Planconcavlinsen. Bei den Linsen, die man planconcave nennt, ist eine Oberfläche eben, die andere concav, wie in den Figuren 30 und 31. Die bezüglichen Formeln erhält man aus denen für planconvexe Linsen, indem man beachtet, dass die

Krümmungsradien entgegengesetzte Vorzeichen erhalten. Für die erste Linse (Fig. 30) setzen wir also $-R$ an Stelle von r in die Gleichungen, die sich auf die Linse der Figur 28 beziehen und erhalten:

$$\varphi = -\frac{R}{\mu - 1}, \qquad VP = 0, \qquad V'P' = -\frac{\triangle}{\mu}.$$

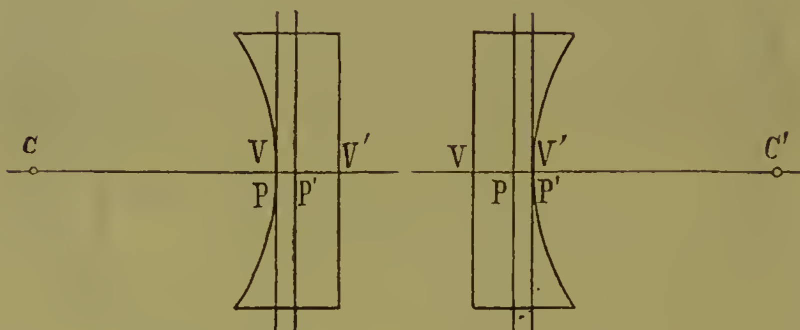


Fig. 30. Fig. 31.

Für die Linse der Figur 31 setzen wir in die Formeln des vorhergehenden Artikels r' an die Stelle von $-R'$ und werden haben:

$$\varphi = -\frac{r'}{\mu - 1}, \qquad VP = \frac{\triangle}{\mu}, \qquad V'P' = 0.$$

Diese Formeln zeigen:

1. Dass die planconcaven Linsen immer divergent sind;

2. Dass einer der Hauptpunkte im Scheitel der gekrümmten Oberfläche liegt, der andere im Innern der Linse um $\frac{\triangle}{\mu}$ von der ebenen Oberfläche entfernt, wie bei den Planconvexlinsen.

67. Concavconvexlinsen oder Menisken. Zum Schlusse betrachten wir den Fall, in dem eine der Oberflächen concav, die andere convex ist (Fig. 32 u. 33). Alsdann nennt man die Linse eine concavconvexe oder einen Meniscus.

Für Menisken sind r und r' von gleichem Vorzeichen, daher ist das Product rr' positiv und φ hat das Vorzeichen von ϱ. Dem-

nach ist ein Meniscus convergent oder divergent, je nachdem ϱ positiv oder negativ ist: convergent wenn die Relation

$$\triangle > \frac{\mu}{\mu-1}(r-r'),$$

divergent wenn die Relation

$$\triangle < \frac{\mu}{\mu-1}(r-r')$$

erfüllt ist.

Wir unterscheiden drei Fälle:

Erster Fall (Fig. 32). Der absolute Werth des Krümmungsradius der concaven Fläche sei grösser als derjenige der convexen. In diesem Falle ist die Differenz $r-r'$ negativ; denn sind r und r' beide positiv, so ist die convexe Oberfläche die erste und der grössere

Fig. 32.

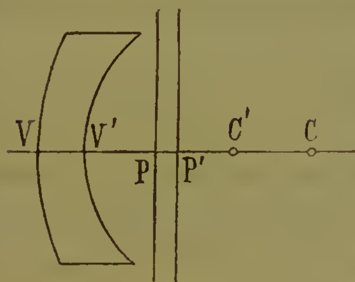
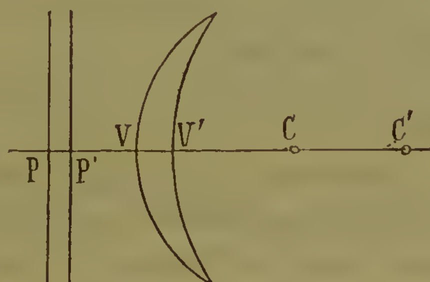


Fig. 33.



von beiden Radien ist der Radius r'; sind aber beide Radien negativ und beziehungsweise gleich $-R$ und $-R'$, so ist die convexe Fläche die zweite, R ist grösser als R' und die Differenz

$$r-r' = R'-R$$

wird wieder negativ. Da nun $\triangle$ eine wesentlich positive Grösse ist, so wird die Relation

$$\triangle > \frac{\mu}{\mu-1}(r-r')$$

immer erfüllt und die Linse ist immer convergent.

Zweiter Fall. Die beiden Krümmungsradien seien einander gleich. Dann ist $r-r' = 0$ und folglich auch

$$\triangle > \frac{\mu}{\mu-1}(r-r'),$$

die Linse ist immer convergent.

Dritter Fall. Der absolute Werth des Krümmungsradius der convexen Fläche sei grösser als jener der concaven Fläche. In diesem Falle kann die Linse divergent, telescopisch oder convergent sein, je nach dem Werthe von $\triangle$. Die Differenz $r-r'$ ist nämlich positiv und daher kann immer ein Werth von $\triangle$ so gewählt werden, dass entweder die Relation

$$\triangle < \frac{\mu}{\mu-1}(r-r'),$$

oder die Gleichung

$$\triangle = \frac{\mu}{\mu-1}(r-r'),$$

oder endlich die Relation

$$\triangle > \frac{\mu}{\mu-1}(r-r')$$

erfüllt werde.

Für $\mu = {}^3/_2$ ist die Linse divergent, telescopisch oder convergent, je nachdem

$$\triangle < 3(r-r'), \quad \triangle = 3(r-r'), \quad \triangle > 3(r-r')$$

ist.

Für Linsen von geringer Dicke, wie sie gewöhnlich in unseren optischen Instrumenten vorkommen, ist die erste Relation in der Regel erfüllt; mit Rücksicht auf praktische Fälle wird desshalb diese Linsenart als divergent zu bezeichnen sein.

Als Beispiel einer concavconvexen Linse untersuchen wir eine Linse mit concentrischen Oberflächen. Setzen wir r und r' positiv voraus, so haben wir in diesem Falle $\triangle = r-r'$, und wenn wir $\mu > 1$ voraussetzen, wie es für die gebräuchlichen Linsen anzunehmen ist, so wird $\frac{\mu}{\mu-1} > 1$. Daher ist

$$\triangle < \frac{\mu}{\mu-1}(r-r'),$$

und die Linse ist divergent. Für eine solche Linse haben wir

$$\varrho = -\triangle + \frac{\mu-1}{\mu}\triangle,$$

oder auch

$$\varrho = -\frac{\triangle}{\mu};$$

ferner

$$\varphi = -\frac{\mu}{\mu - 1}\,\frac{r r'}{r - r'},$$

welche Formel man auch so schreiben kann:

$$\frac{1}{\varphi} = -\frac{\mu - 1}{\mu}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right).$$

Diese so bestimmte Brennweite wird unendlich gross, wenn die Dicke $r - r'$ bis Null abnimmt.

Für die Menisken sind den Gleichungen (2′) und (3′) gemäss, die Entfernungen VP und $V'P'$ der Hauptpunkte von den Scheiteln der Oberfläche immer mit gleichem Vorzeichen behaftet, d. h. die beiden Hauptpunkte liegen immer gleichzeitig entweder auf der convexen oder auf der concaven Seite der bezüglichen Linsenoberfläche. Ferner haben diese Distanzen gleiches Vorzeichen mit den Radien r und r' oder entgegengesetztes, je nachdem ϱ negativ oder positiv ist; daher liegen die beiden Hauptpunkte auf der convexen Seite, wenn die Linse convergent (Fig. 32), auf der concaven hingegen, wenn die Linse divergent ist (Fig. 33).

Für eine Linse mit concentrischen Oberflächen, wie wir sie soeben als Beispiel betrachtet haben, wird

$$VP = r, \qquad V'P' = r',$$

und daher fallen die beiden Hauptpunkte mit dem gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt der beiden Oberflächen zusammen.

68. Graphische Bestimmung der Fundamentalpunkte einer Linse. Die Fundamentalpunkte einer Linse lassen sich rein graphisch bestimmen. Es genügt zu diesem Zwecke mit Hilfe der im Artikel 4 gegebenen Regel die Austrittsgerade zu bestimmen, die einer zur Axe parallelen Einfallsgeraden entspricht und die Einfallsgerade zu finden, die einer zur Axe parallelen Austrittsgeraden zugehört; jene schneidet die Axe im zweiten Brennpunkte und die Einfallsgerade in einem Punkte der zweiten Hauptebene, diese schneidet die Axe im ersten Brennpunkte und die Austrittsgerade in einem Punkte der ersten Hauptebene.

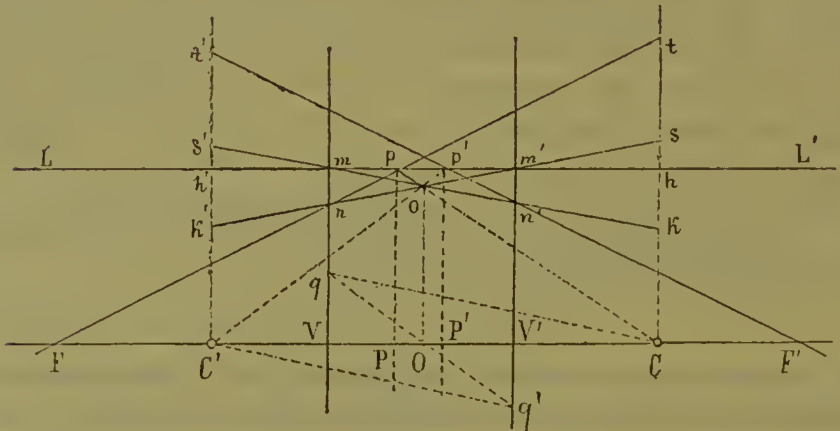
Man habe beispielsweise eine Biconvexlinse (Fig. 34); V, V' seien die Scheitel, C, C' die Krümmungsmittelpunkte.

Wir ziehen die Gerade LL' parallel zur Axe und betrachten sie als eine Einfallsgerade; wir tragen auf der zur Axe durch das Centrum C senkrecht geführten Geraden Ch das Stück

$$Ck = \frac{1}{\mu} Ch$$

auf und ziehen $s'mn'k$, dieses ist die Gerade, mit welcher der Strahl nach der ersten Brechung zusammenfällt; machen wir dann $C't' = \mu C's'$ und ziehen wir $t'n'F'$, so ist dieses die Austrittsgerade; F' ist der zweite Brennpunkt, p' ein Punkt der zweiten Hauptebene und seine Projection P' auf die Axe der zweite Hauptpunkt, auf dieselbe Weise findet man die Einfallsgerade $Fnpt$,

Fig. 34.



welche der Geraden LL' entspricht, wenn man sie als Austrittsgerade betrachtet, wodurch dann der erste Brennpunkt F und der erste Hauptpunkt P bestimmt ist.

Aber bequemer und in diesem Falle auch genauer, ist die für den allgemeinen Fall im Artikel 44 gezeigte Construction. Wir schliessen wie folgt: Die Punkte p und p', in denen die Gerade LL' die beiden Hauptebenen schneidet, die wir bestimmen wollen, sind zueinander conjugirt und haben desshalb einen gemeinsamen conjugirten Punkt in dem Medium, aus welchem die Linse besteht. Dieser Punkt, zu p conjugirt bezüglich der ersten Linsenfläche und zu p' bezüglich der zweiten, muss gleichzeitig auf mn' liegen, dem

an der ersten Linsenfläche gebrochenen, zu Lm als einfallenden gehörigen Strahle, und auf nm', dem Strahle, welcher bezüglich der zweiten Linsenfläche dem Strahle $m'L'$ entspricht. Er liegt also in o, in dem Durchschnittspunkte der Geraden mn' und nm'. Aber für ein System von zwei Medien liegen zwei conjugirte Punkte immer auf einer durch den Mittelpunkt der brechenden Fläche gehenden Geraden (8 und 9); somit schneiden die Geraden Co und $C'o$ die Gerade LL' in den gesuchten Punkten p und p'.

Sind die Punkte p und p' gefunden, so bestimmen die Geraden pn und $p'n'$ die beiden Brennpunkte F und F'.

Der Punkt O, der Fusspunkt des aus o auf die Axe gefällten Perpendikels, ist conjugirt zu P bezüglich der ersten und zu P' bezüglich der zweiten brechenden Fläche. Daher wird jedem Lichtstrahle, der im Innern der Linse durch O geht, eine durch P gehende Einfallsgerade und eine durch P' gehende Austrittsgerade entsprechen; und weil P und P' Knotenpunkte sind (59), so ist O der Punkt, in dem sich alle jene im Innern der Linse verlaufenden Strahlen schneiden, für welche die Austrittsgeraden parallel zu den Einfallsgeraden werden, oder für welche die Lichtstrahlen ohne abgelenkt zu werden die Linse durchsetzen.

Diese Bemerkung liefert ein Mittel den Punkt O mit grosser Genauigkeit zu bestimmen und dadurch die Construction des Punktes o zu controliren, der zur graphischen Bestimmung der Fundamentalpunkte dient. Man ziehe nämlich durch die Mittelpunkte C und C' irgend zwei zu einander parallele Krümmungsradien Cq und $C'q'$; die Gerade qq' schneidet dann die Axe im Punkte O. In der That, die Gerade qq' bildet gleiche Winkel mit den Normalen Cq und Cq', und desshalb wird ein Lichtstrahl, der nach der ersten Brechung mit qq' zusammenfällt, nach der zweiten Brechung parallel zu einfallendem Strahle austreten.

Der Punkt O, zu dessen Betrachtung wir geführt wurden und dem man eine grössere Wichtigkeit beilegte als er in Wirklichkeit besitzt, hat den Namen **optischer Mittelpunkt** erhalten. Er liegt im Innern der Linse, wenn die beiden Krümmungsradien entgegengesetzte Vorzeichen und ausserhalb, wenn sie gleiche Vor-

7*

zeichen haben; sind die beiden Radien der Grösse und dem Vorzeichen nach einander gleich, so liegt er im Unendlichen.

§ 3. *Unendlich dünne Linsen.*

69. Wenn man sich die Dicke einer Linse bis zu Null abnehmend denkt, so nähern sich die Fundamentalpunkte gewissen Grenzlagen, die man erhält, indem man in den Gleichungen (1), (2) und (3) des vorhergehenden Paragraphen $\triangle = 0$ setzt. Die ideelle Linse, welche ihre Fundamentalpunkte in diesen Grenzlagen hat, ist jene, die wir eine unendlich dünne Linse nennen.

Für $\triangle = 0$ gibt die Gleichung (1) die Brennweite einer unendlich dünnen Linse

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \frac{r r'}{r' - r},$$

welche Gleichung man auch so schreiben kann:

$$\frac{1}{\varphi} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right). \qquad (1'')$$

Man sieht sofort, dass, wenn r und r' entgegengesetzte Vorzeichen haben, der durch die Ausdrücke gegebene Werth von φ positiv wird, wenn r positiv und r' negativ ist, und negativ im entgegengesetzten Falle; wenn r und r' beide positiv sind, φ positiv wird wenn r' grösser ist als r, und wenn r und r' beide negativ sind, φ dann und nur dann positiv wird, wenn $r' > r$ ist. Unter den unendlich dünnen Linsen sind also convergent die biconvexen, die planconvexen und jene concavconvexen, bei denen der Krümmungsradius der concaven Fläche grösser ist als der Krümmungsradius der convexen; hingegen sind divergent die biconcaven Linsen, die planconcaven und die Menisken, bei denen der Krümmungsradius der concaven Oberfläche kleiner ist als der Radius der convexen Fläche.

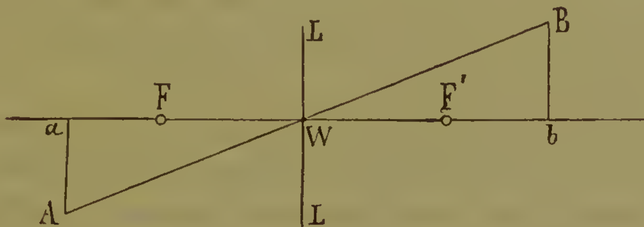
70. Die Gleichungen (2) und (3) des vorhergehenden Paragraphen geben für $\triangle = 0$:

$$VP = 0, \qquad V'P' = 0.$$

Die Hauptpunkte einer unendlich dünnen Linse fallen also mit dem Punkte zusammen, in welchem man sich die Scheitel der beiden Linsenflächen vereinigt zu denken hat.

Eine unendlich dünne Linse wird somit schon mit Hilfe dreier Punkte bestimmt sein: durch den Punkt W (Fig. 35), mit welchem die Scheitel ihrer Oberflächen zusammenfallen und durch zwei Punkte F und F', die in gleichen Abständen auf entgegengesetzten Seiten von W liegen und welche die beiden Brennpunkte der Linse sind. Die Linse ist convergent, wenn, wie in der Figur, diese drei Punkte, im Sinne der Lichtfortpflanzung fortschreitend, sich in der Ordnung F, W, F' folgen, sie ist divergent, wenn die drei Punkte in der Ordnung F', W, F aufeinander folgen.

Fig. 35.



Behalten wir die im Artikel 11 getroffene Uebereinkunft bei, wonach an Stelle der wahren Figuren, welche die wirkliche Anordnung von Punkten und Linien geben würden, in den graphischen Darstellungen veränderte Figuren substituirt werden, in denen alle Entfernungen von der Axe durch eine sehr grosse Zahl multiplicirt erscheinen, so müssen wir die beiden Seitenflächen der Linse durch eine einzige zur Axe senkrechte Gerade LWL darstellen. Diese Gerade, welche unter Einem die beiden Linsenflächen und die beiden Hauptebenen repräsentirt, nennen wir der Kürze halber L i n s e; wir werden ferner S c h e i t e l den Punkt W nennen, in welchem die Linse von der Axe geschnitten wird.

71. Da für Linsen die Hauptpunkte auch Knotenpunkte sind (59), so wird für eine unendlich dünne Linse, bei der die beiden Hauptpunkte mit W zusammenfallen (Fig. 35), jedem einfallenden Strahle AW, der durch W geht, ein austretender WB entsprechen, der die Verlängerung des ersteren bildet. Mit anderen Worten:

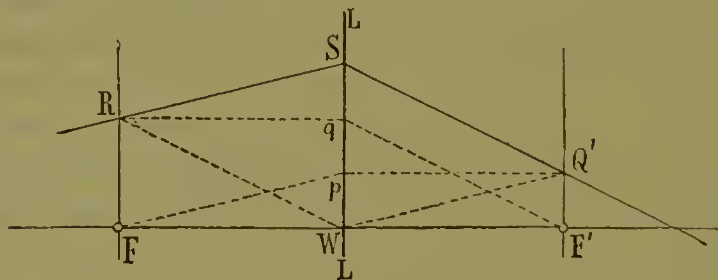
Für eine unendlich dünne Linse fällt jede durch W gehende Einfallsgerade mit der entsprechenden Austrittsgeraden zusammen.

Ist AW ein Strahl, der von einem leuchtenden Punkte A ausgegangen ist, so geht der ihm entsprechende gebrochene Strahl WB durch den zu A conjugirten Punkt B; für eine unendlich dünne Linse liegen also zwei conjugirte Punkte auf derselben durch den Scheitel gehenden Geraden. In Folge dieser Eigenschaft heisst die Gerade AW, welche einen Punkt A mit dem Scheitel W der Linse verbindet, die secundäre Axe dieses Punktes.

Sind zwei conjugirte Ebenen aA und bB gegeben und in der ersten von ihnen eine Figur oder ein Bild, so wird das conjugirte Bild bestimmt sein durch die Schnittpunkte der secundären Axen der Punkte A der ersten mit der zweiten der conjugirten Ebenen. Zwei conjugirte Bilder sind perspectivisch bezüglich des Scheitels der Linse.

72. Diese Betrachtungen vereinfachen für unendlich dünne Linsen etwas die im Artikel 60 gezeigten Constructionen, durch welche der austretende Strahl der einem gegebenen einfallenden entspricht, oder der zu einem gegebenen Punkte conjugirte gefunden wird.

Fig. 36.



Die Constructionen, welche dazu dienen können, um den austretenden Strahl SQ' zu finden, der einem gegebenen einfallenden RS (Fig. 36) entspricht, sind die folgenden.

1. Man ziehe Rq parallel zur Axe und SQ' parallel zu qF', der Geraden, welche q mit dem zweiten Brennpunkte verbindet.

2. Man ziehe Fp parallel zu RS, pQ' parallel zur Axe und verbinde S mit Q'.

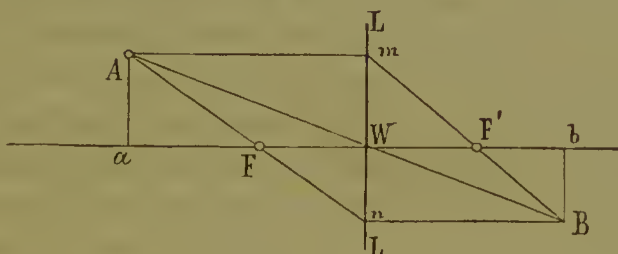
3. Man ziehe SQ' parallel zu RW.

4. Man ziehe WQ' parallel zu RS und verbinde S mit Q'.

Man bemerke, dass das Viereck $RSQ'W$ ein Parallelogramm ist und dessen eine Diagonale SW. Die andere Diagonale ist die Gerade RQ', die in der Figur nicht verzeichnet wurde. Da sich die beiden Diagonalen gegenseitig halbiren, so kann man auch Q' finden, indem man die Gerade zieht, welche R mit dem Mittelpunkt von WS verbindet und bis zum Durchschnitt mit der zweiten Brennebene verlängert.

Um den Punkt B zu finden, der zu dem gegebenen Punkte A (Fig. 37) gehört, ziehe man Am parallel zur Axe und verbinde m mit F'; zieht man dann in ähnlicher Weise AFn, und nB parallel

Fig. 37.



der Axe, so werden sich die beiden Geraden mF' und nB in dem gesuchten Punkte B schneiden. Oder man ziehe die secundäre Axe AW, welche die Gerade mF' oder auch nB in dem gesuchten Punkte B schneiden wird.

73. Wenn man diese Constructionen mit jenen vergleicht, welche im Artikel 60 für Linsen von endlicher Dicke oder für ein beliebiges System angegeben wurden, so sieht man, wie irgend eine auf Linsen bezügliche Aufgabe sich auf den einfachen Fall einer unendlich dünnen Linse reduciren lässt. Nennt man in der That P, P', F, F' die Fundamentalpunkte der Linse oder des gegebenen Linsensystems; denkt man sich ferner eine unendlich dünne Linse die ihren Scheitel im ersten Hauptpunkte P hat und deren Brennweite gleich ist der des gegebenen Systems; so wird ihr erster Brennpunkt mit F zusammenfallen und der zweite wird von F' um eine Strecke gleich PP' abstehen. Wird alsdann verlangt, die aus-

tretenden Strahlen zu finden, die gegebenen einfallenden entsprechen, oder die zu gegebenen Punkten conjugirten, so wird man Strahlen oder Punkte bestimmen, wie sie sich ergeben würden, wenn an Stelle des wirklichen gegebenen Systems die gedachte unendlich dünne Linse sich befände; diese derart bestimmten Geraden und Punkte wird man parallel der Axe um ein Stück gleich der Entfernung PP' verschieben und so die gesuchten Geraden und Punkte erhalten.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass dieses Hilfsmittel anwendbar ist auf ein beliebiges dioptrisches System, in welchem die beiden äussersten Medien gleiche Brechungsindices besitzen.

Diese Betrachtungen, verbunden mit den im Art. 40 ausgeführten, beweisen den folgenden allgemeinen Satz:

Irgend einem centrirten dioptrischen Systeme entspricht ein einfaches System von zwei durch eine einzige Oberfläche getrennten Medien oder aber eine unendlich dünne Linse, welches einfache System oder welche Linse Bilder geben, die parallel zur Axe um eine Distanz gleich dem Abstande der Hauptpunkte verschoben, mit den Bildern zusammenfallen, welche das gegebene dioptrische System hervorbringt. Das einfache System, das man auf diese Weise dem gegebenen Systeme substituiren kann, ist eine brechende Fläche oder eine unendlich dünne Linse, je nachdem im gegebenen Systeme die beiden äussersten Medien ungleiche oder gleiche Brechungsexponenten besitzen.

Der Kürze halber werden wir dieses einfache System von nur zwei Medien oder diese unendlich dünne Linse aequivalent nennen dem gegebenen Systeme.

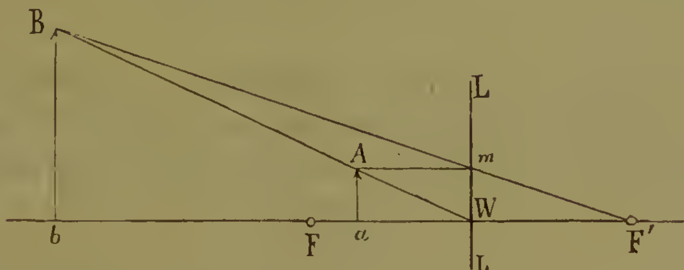
74. Wir werden uns dieser Vereinfachung bedienen bei der Untersuchung der dioptrischen Instrumente, die aus Linsen zusammengesetzt sind. Vorerst wird es aber nützlich sein die Lagen der durch unendlich dünne Linsen erzeugten Bilder anzugeben für solche typische Lagen des leuchtenden Objects, die am häufigsten bei den Anwendungen vorzukommen pflegen.

1. Convergente Linsen. — a) Wenn ein leuchtendes Ob-

ject aA (Fig. 37) oder ein reelles, durch ein anderes dioptrisches System erzeugtes Bild in einer Entfernung von der Linse sich befindet, die grösser ist als ihre Brennweite WF, so liegt das conjugirte Bild rechts von F', ist reell und verkehrt. Je weiter der Punkt a von W entfernt ist, desto näher liegt das conjugirte Bild bB dem Punkte F', und desto kleiner ist es. Wenn das Object ins Unendliche rückt, so fällt sein Bild mit dem Punkte F' zusammen und seine Dimensionen werden Null. Wenn $Wa = 2\,WF$ ist, wird $Wb = 2\,WF'$ und $aA = bB$; die beiden conjugirten Bilder haben dann gleiche Grösse. Für alle Entfernungen Wa, die grösser sind als $2\,WF$, ist das Bild bB kleiner als das Object aA; für alle Entfernungen hingegen, die enthalten sind zwischen WF und $2\,WF$, ist das Bild grösser als das Object. In dieser Weise wirken die Linsen der camera obscura und der Projectionsapparate, die Objectivlinsen der Mikroskope und der Fernrohre.

b) Wenn ein Object oder ein von einem anderen dioptrischen Systeme entworfenes reelles Bild zwischen der Linse W und dem ersten Brennpunkte F liegt, z. B. in aA (Fig. 38), so ist sein conjugirtes Bild ein virtuelles, aufrechtes und vergrössertes; es liegt um

Fig. 38.

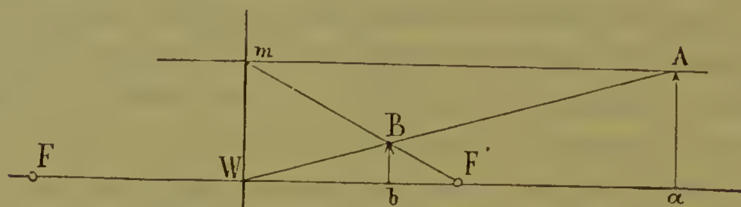


so weiter und ist um so grösser, je näher das Object dem Brennpunkte F rückt. In ein Auge, welches das Object durch die Linse betrachtet, gelangen die Strahlen, als ob sie von den einzelnen Punkten des Bildes bB ausgingen. In dieser Weise wirken die einfachen Mikroskope und die convergenten Oculare der zusammengesetzten Mikroskope und der Fernrohre.

c) Nehmen wir an, dass zur Linken der Linse W ein dioptrischer Apparat vorhanden wäre, der, wenn die Linse W nicht

existirte, von einem gegebenen Objecte ein reelles Bild *aA* erzeugte (Fig. 39); dann bewirkt die links von diesem Bilde gelegene Linse *W*, dass an Stelle des Bildes *aA* ein anderes *bB* entsteht, das zu ersterem

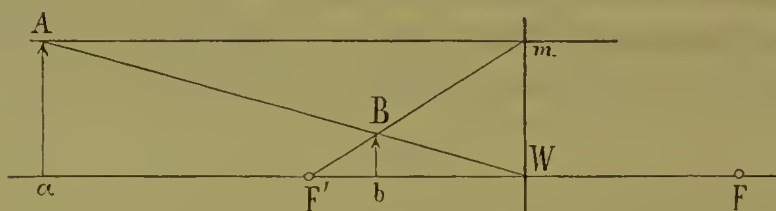
Fig. 39.



conjugirt, mit diesem gleichgerichtet und verkleinert ist. Diese Wirkung kommt der Collectivlinse des sogenannten CAMPANI'schen Oculares zu.

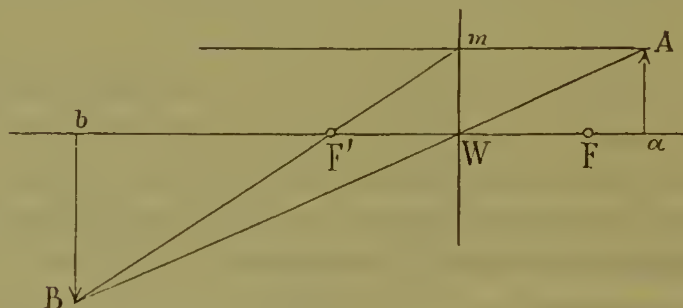
2. Divergente Linsen. — a) Wenn das Object *aA* (Fig. 40) links von der Linse liegt (immer vorausgesetzt, dass sich das Licht

Fig. 40.



von der Linken zur Rechten fortpflanze), so ist sein conjugirtes Bild *bB* näher an der Linse, aufrecht und verkleinert. Dieser Fall findet statt bei den divergenten Brillengläsern für Kurzsichtige.

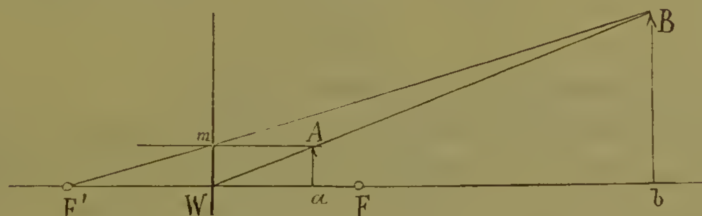
Fig. 41.



b) Ein dioptrisches System möge von einem gegebenen Objecte das reelle Bild *aA* erzeugen (Fig. 41). Wenn wir links von diesem

Bilde, nämlich zwischen dieses und dem dioptrischen Systeme, die divergente Linse W so stellen, dass ihr erster Brennpunkt F zur Linken von a liegt, so wird sie ein virtuelles, bezüglich aA verkehrtes Bild bB geben, das links von F' sich befindet. Auf diese Weise wirkt das Ocular des GALILEI'schen Fernrohres.

Fig. 42.



c) Wenn wir wieder, statt das reelle Bild aA sich bilden zu lassen, die Strahlen durch eine divergente Linse W (Fig. 42) auffangen, aber in der Weise, dass der erste Brennpunkt F rechts von a liegt, so erhalten wir ein reelles aufrechtes Bild bB, weiter von der Linse entfernt und grösser als aA. In ähnlicher Weise wirkt in einem achromatischen Objective die Flintglaslinse.

§ 4. *Systeme von zwei Linsen.*

75. Bevor wir zur Untersuchung der aus Linsen zusammengesetzten Instrumente übergehen, wird es gut sein, uns zuerst mit den Combinationen von zwei Linsen zu beschäftigen.

Es seien zwei Linsen mit gemeinsamer Axe gegeben (Fig. 43); P_1, P_1' und F_1' seien die Hauptpunkte und der zweite Brennpunkt der ersten, P_2, P_2', F_2 die Hauptpunkte und der erste Brennpunkt der zweiten dieser Linsen; ferner mögen mit φ_1 und φ_2 die Brennweiten der beiden Linsen und mit $\triangle$ die Entfernung $P_1' P_2$ der zweiten Hauptebene der ersten Linse von der ersten Hauptebene der zweiten Linse bezeichnet sein. Mittels dieser Daten können entweder durch Rechnung oder durch Construction die Brennweite φ des Systems und dessen Hauptpunkte P und P' gefunden werden.

Zur Berechnung dieser Grössen dienen die Gleichungen (6'), (5') und (7') des Artikels 44. Indem wir in diesen Gleichungen

$$f' = -f = \varphi, \quad f_1' = -f_1 = \varphi_1, \quad f_2' = -f_2 = \varphi_2$$

setzen, erhalten wir:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle}, \qquad (6'')$$

$$P_1 P = \frac{\varphi_1 \triangle}{\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle}, \qquad (5'')$$

$$P_2' P' = - \frac{\varphi_2 \triangle}{\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle}, \qquad (7''$$

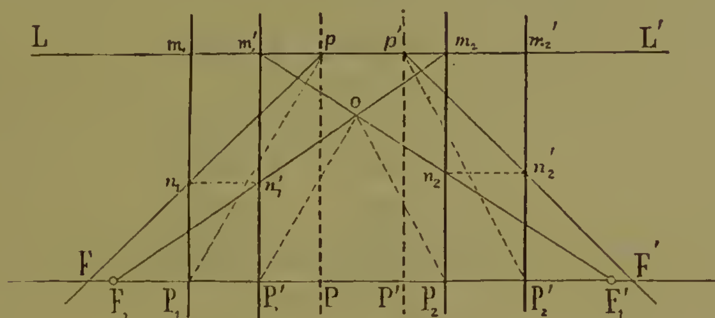
und diese Formeln lösen die gestellte Aufgabe.

73. Um die Fundamentalpunkte des betrachteten Systems auf graphischem Wege zu finden, können wir uns der allgemeinen Regel (42) bedienen; es genügt eine Gerade parallel der Axe zu ziehen (Fig. 43) und, indem man sie als Einfallsgerade betrachtet, die entsprechende Austrittsgerade zu bestimmen, ist diese $p' n_2'$, so wird der Punkt F', in dem sie die Axe schneidet, der zweite Brennpunkt und der Punkt p', in welchem sie die Gerade LL' schneidet, ein Punkt der zweiten Hauptebene $p' P'$ sein, welch letztere die Axe in dem zweiten Hauptpunkte P' trifft. Setzen wir voraus, es sei $n_1 p$ die Einfallsgerade, die LL' entspricht, wenn letztere als Austrittsgerade betrachtet wird, so ist in ähnlicher Weise F der erste Brennpunkt, p ein Punkt der ersten Hauptebene und P der erste Hauptpunkt. Es ist aber auch hier zweckmässiger auf die im Artikel 44 dargelegte Construction zurückzugreifen, welche die Bestimmung der beiden Hauptebenen zurückführt auf die Bestimmung der zu ihnen conjugirten, in dem zwischen beiden Systemen befindlichen Medium gelegenen Ebene. Wir wollen für den speziellen Fall, der uns jetzt beschäftigt, die Ueberlegungen wiederholen, welche im Artikel 44 zu dieser Construction geführt haben.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die beiden Punkte p und p', in denen die Gerade LL' die beiden Hauptebenen des Systems schneidet; die beiden Punkte sind conjugirt zueinander und haben daher in dem zwischen den Linsen gelegenen Medium denselben conjugirten Punkt. Dieser zu den beiden Punkten p und p' conjugirte Punkt ist der Schnittpunkt o der beiden Geraden $m_1' F_1'$ und $m_2 F_2$. In der That, als conjugirter zum Punkte p bezüglich der ersten Linse muss dieser Punkt auf $m_1' F_1'$ liegen, welche bezüglich der

ersteren Linse die Austrittsgerade ist, die zur Einfallsgeraden Lp durch p gehört. Ebenso wird der genannte Punkt, als conjugirter zu p' bezüglich der zweiten Linse liegen müssen auf der Geraden $F_2 m_2$, der Einfallsgeraden, die der durch p' gehenden Austrittsgeraden $p' L'$ entspricht. Da er sich also auf den beiden Geraden $m_1' F_1'$ und $F_2 m_2$ befinden muss, so fällt dieser Punkt mit dem Schnittpunkt o dieser Geraden zusammen.

Fig. 43.



In Folge dieses Satzes bestimmen sich die Punkte p und p' und daher auch die Punkte P und P' sehr einfach mit Hilfe des Punktes o. Die beiden Geraden $o P_1'$ und $p P_1$ nämlich müssen als conjugirte Gerade, die durch die Knotenpunkte gehen, parallel sein und ebenso müssen parallel zueinander sein die beiden Geraden $o P_2$ und $p' P_2'$. Wir erhalten also die folgende Regel:

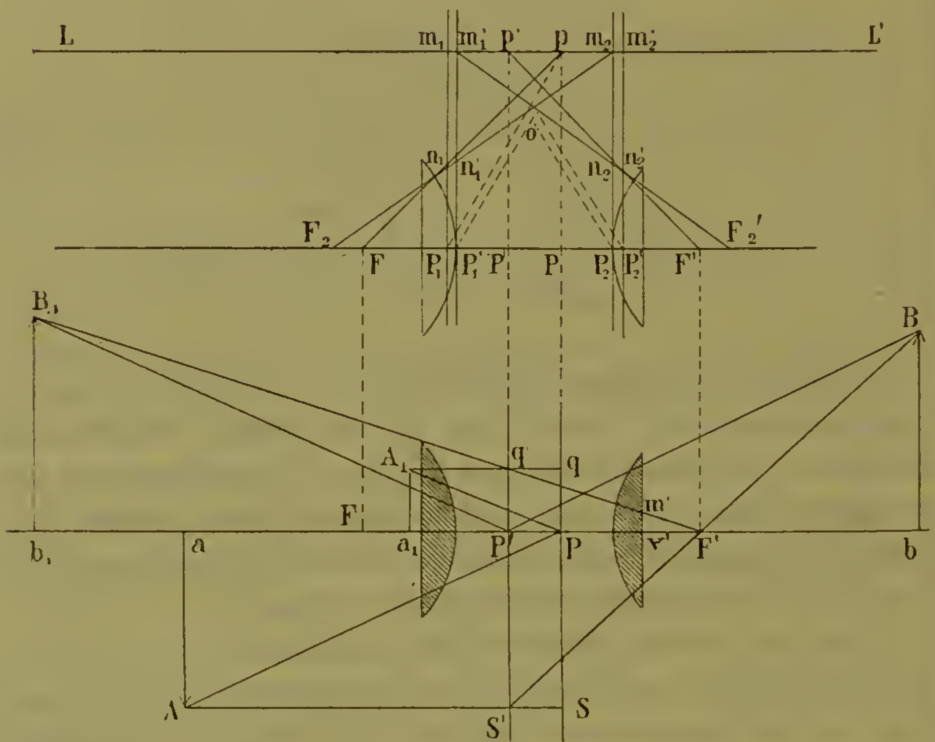
Um die beiden Hauptpunkte des Systems von zwei Linsen $P_1 P_1' F_1'$ und $F_2 P_2 P_2'$ zu bestimmen, ziehe man eine beliebige Gerade LL' parallel zur Axe und die Geraden $m_1' F_1'$, $m_2 F_2$, die sich in einem Punkte o schneiden werden; zieht man dann die Geraden $P_1 p$, $P_2' p'$ parallel zu $o P_1'$ und $o P_2$, so sind die Punkte p und p', in denen sie die Gerade LL' schneiden, zwei Punkte der beiden Hauptebenen.

Hat man auf diese Weise die Hauptebenen gefunden, so kann man sofort auch die Brennpunkte bestimmen. Man ziehe zu diesem Zwecke $n_1' n_1$ parallel zur Axe; die Punkte n_1 und n_1' sind conjugirt bezüglich der ersten Linse. Daher entspricht die Gerade $p n_1$ der Geraden $o n_1'$ bezüglich der ersten Linse und der Geraden $p' L'$

bezüglich des ganzen Systemes und schneidet folglich die Axe im ersten Brennpunkte F. Ganz analog erhält man den zweiten Brennpunkt, indem man $n_2 n_2'$ parallel der Axe und sodann $p' n_2' F'$ zieht.

77. Dieser Construction wollen wir uns bedienen um die Eigenschaften einiger Combinationen von zwei Linsen zu untersuchen, von denen in den gewöhnlichen optischen Instrumenten Gebrauch gemacht wird.

Fig. 44.



a) Es sei zuerst ein System von zwei convergenten Linsen, z. B. von zwei planconvexen Linsen (Fig. 44) gegeben. die so vereinigt sind, dass die beiden Brennpunkte F_2 und F_2' ausserhalb der Strecke $P_1'P_2$ zu liegen kommen. Die im oberen Theile der Figur durchgeführte Construction, identisch mit der im vorigen Artikel angegebenen, zeigt, dass das System convergent ist (wie schon aus der Gleichung (6″) des Artikel 75 bekannt), dass die beiden Brennpunkte ausserhalb und die beiden Hauptpunkte zwischen den beiden Linsen gelegen sind. Es ist ferner einleuchtend,

dass die Fundamentalpunkte, statt in der Ordnung $FP'PF'$, auch in der Ordnung $FPP'F'$ angeordnet sich ergeben können.

Der untere Theil der Figur 44, in welchem die Hauptebenen und Brennpunkte verzeichnet sind mit Weglassung der Constructionslinien die zu ihrer Bestimmung gedient haben, zeigt die Wirkung des Systemes. Wenn ein Object oder ein von einem anderen optischen Systeme erzeugtes reelles Bild in a_1A_1, zwischen dem ersten Brennpunkte F und dem ersten Hauptpunkte P liegt, so gibt das System hievon ein virtuelles, aufrechtes und vergrössertes Bild b_1B_1, wie eine unendlich dünne Linse im Falle *b*) (74). In der That schneiden sich in B_1 die Austrittsgerade $F'q'$, welche der zur Axe parallelen Einfallsgeraden A_1q entspricht, und die Gerade $P'B_1$, die parallel zu A_1P gezogen, die dieser letzteren entsprechende Austrittsgerade ist. Solcherart ist die Wirkung der aus zwei Linsen zusammengesetzten einfachen Mikroscope, Duplete genannt und der Ramsden'schen oder positiven Oculare, die man in astronomischen Fernrohren und in Mikroskopen anwendet.

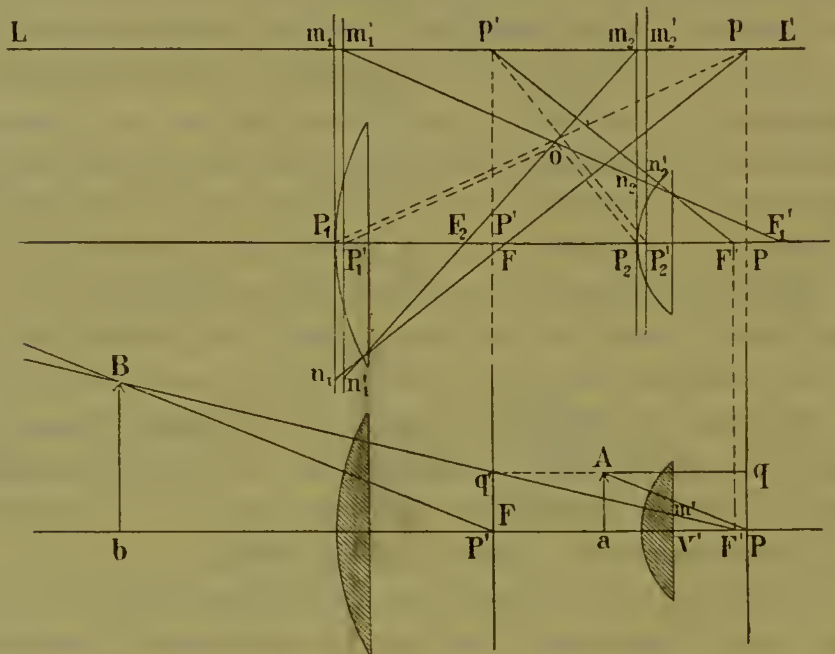
Befindet sich hingegen das Object oder reelle Bild in aA, weiter vom Systeme entfernt als der Brennpunkt F, so entsteht sein Bild in bB, ist verkehrt und reell (unendlich dünne Linsen, Fall *a*, Artikel 74); denn in B schneiden sich die zu AP parallele Gerade $P'B$ und die Gerade $s'B$, nach welcher der zur Axe parallel einfallende Strahl As austritt. Die Objective der camera obscura und die Linsen der Projectionsapparate wirken auf diese Weise.

b) Man habe wieder zwei convergente Linsen (Fig. 45), aber diese seien so angeordnet, dass der erste Brennpunkt F_2 der zweiten Linse innerhalb des Segmentes $P_1'P_2$ und der zweite Brennpunkt F_1' ausserhalb dieses Segmentes in geringem Abstande von P_2' zu liegen kommt. Der obere Theil der Figur zeigt wieder die Construction, durch welche die Fundamentalpunkte des Systemes gefunden werden können: vom Punkte o, in dem sich die Geraden $m_1'F_1'$ und m_2F_2 schneiden, wurden die Geraden oP_1' und oP_2 gezogen und von den Punkten P_1 und P_2' aus die Parallelen P_1p und $P_2'p'$ zu diesen, welche durch ihre Schnittpunkte p und p' mit der Geraden LL' die Lagen der Hauptebenen bestimmen; sodann wurden die Geraden n_1n_1' und n_2n_2' parallel zur Axe und endlich die Ge-

raden pn_1 und $p'n_2'$ gezogen, deren Schnitte mit der Axe die Brennpunkte F und F' geben. Die Fundamentalpunkte sind demnach in der Reihenfolge $P'FF'P$ angeordnet und die beiden ersten derselben befinden sich innerhalb, die beiden anderen ausserhalb des Systemes.

Im unteren Theile der Figur, in dem die Fundamentalpunkte ohne die zu ihrer Bestimmung nöthigen Constructionslinien eingezeichnet sind, ist angenommen, dass die Gerade aA das reelle Bild, erzeugt durch ein anderes optisches System, vorstelle, wie es in dieser Lage zu Stande käme, wenn das betrachtete System nicht

Fig. 45.

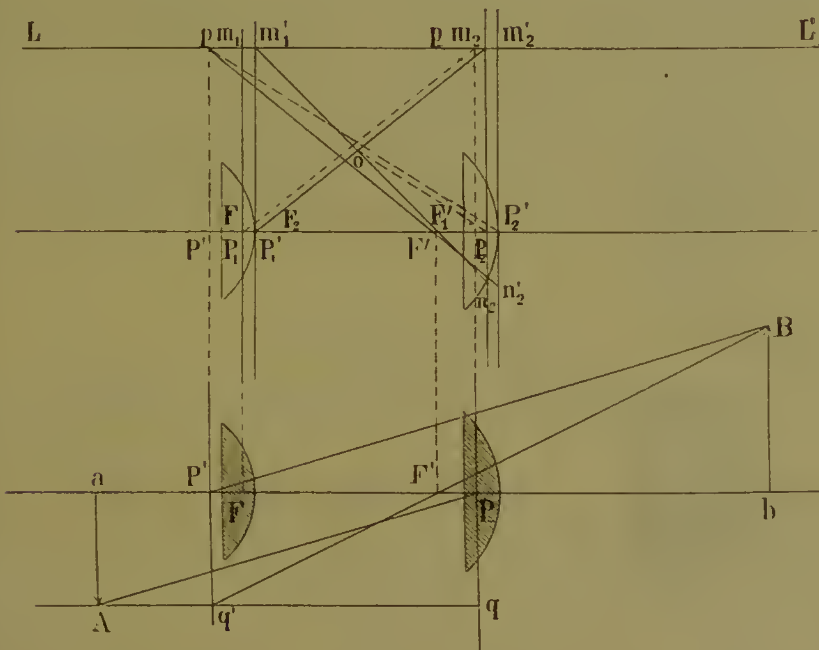


vorhanden wäre. Um das durch dieses System hervorgebrachte conjugirte Bild zu finden, hat man nur nöthig die Gerade AP zu ziehen und zu dieser parallel die Gerade $P'B$ aus P', sodann qAq' parallel zur Axe zu machen und $F'q'$ zu verzeichnen; der Punkt B, in welchem $F'q'$ die Gerade $P'B$ schneidet ist der zu A conjugirte Punkt und die zur Axe Senkrechte Bb das Bild von Aa. Das Bild also, welches ohne das System in aA, zwischen dem Brennpunkte F und dem Hauptpunkte P zu Stande käme, wird durch dieses System in das Bild bB, das ein virtuelles, aufrechtes und vergrössertes Bild

ist, verwandelt (unendlich dünne Linsen, Fall *b*, Artikel 74). Derartig wirken die Linsen des Campani'schen oder negativen Oculares, das in Mikroskopen und Fernrohren Verwendung findet.

c) Man habe zwei derartig angeordnete convergente Linsen (Fig. 46), dass der erste Brennpunkt F_2 der zweiten zusammenfällt oder doch sehr nahe liegt dem zweiten Hauptpunkte P_1' der ersten Linse, während der zweite Brennpunkt F_1' dieser, innerhalb des Segments $P_1'P_2$ und etwas vor P_2 zu liegen kommt. Die im obern Theile der Figur angegebene Construction zeigt, dass in diesem Falle der

Fig. 46.

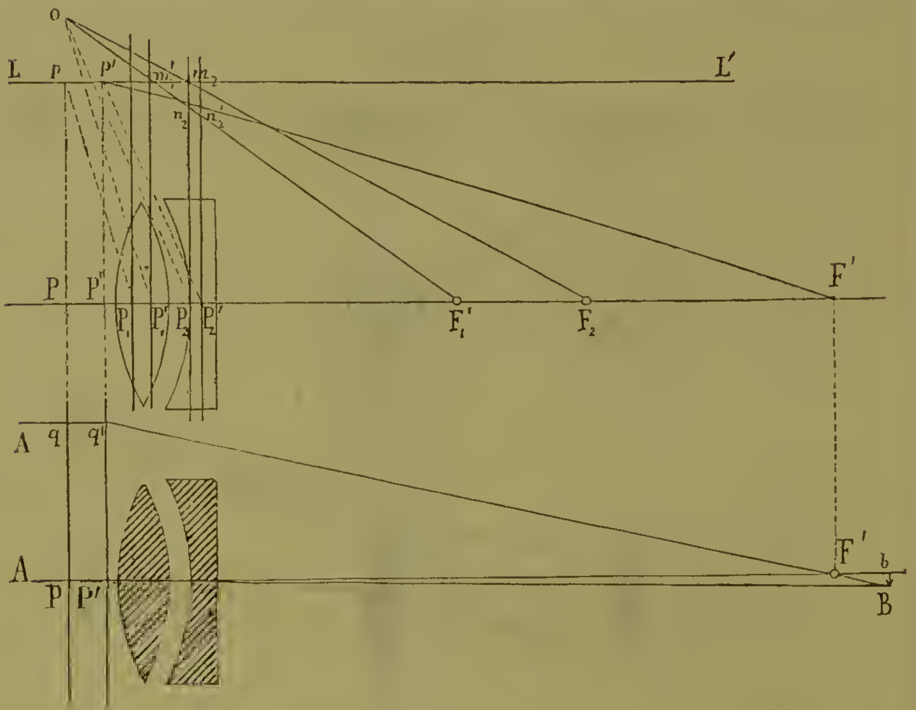


erste Hauptpunkt P sehr nahe an dem der zweiten Linse P_2, und der zweite Hauptpunkt P' links und in einiger Entfernung vom Punkte P_1 zu liegen kommt, dass der zweite Brennpunkt F' im Innern des Systemes, ein Weniges vor F_1' und der erste Brennpunkt F genau oder fast genau im ersten Hauptpunkte der ersten Linse liegt. Die Fundamentalpunkte folgen in der Ordnung $P'F\ F'P$ aufeinander, und nur der erste von diesen liegt ausserhalb des Systemes.

Der untere Theil der Figur zeigt, dass das System von einem

Objecte oder einem reellen Bilde aA, vor der Ebene P' gelegen, ein reelles verkehrtes Bild bB liefert. Der Punkt B wurde erhalten, indem $P'B$ parallel zu AP, Aqq' parallel zur Axe gezogen, q mit F' verbunden und $q'F'$ verlängert wurde bis zum Durchschnitt mit $P'B$. Diese Anordnung und Wirkung haben die beiden Linsen in den terrestrischen Fernrohren, welche zur Erzeugung eines aufrechten Bildes dienen.

Fig. 47.



d) Die erste Linse sei convergent, z. B. biconvex (Fig. 47), die zweite sei divergent, etwa als planconcav angenommen, und die beiden Linsen seien so gestellt, dass der erste Brennpunkt F_2 der zweiten Linse rechts vom zweiten Brennpunkte F_1', der ersten Linse liege. Dieser Fall wird insbesondere dann eintreten, wenn, wie in der Figur, die Brennweite der divergenten Linse, absolut genommen, grösser ist als die Brennweite der convergenten Linse, und die beiden Linsen sehr nahe bei einander gestellt sind. Der obere Theil der Figur zeigt die Ermittlung der Fundamentalpunkte: die beiden Hauptpunkte P, P' befinden sich zur Linken des Syste-

mes und nahe aneinander, der zweite Brennpunkt F' liegt zur Rechten, der erste Brennpunkt, in der Figur nicht verzeichnet, würde zur Linken von P, in einer Entfernung gleich $P'F'$, sich befinden. Das System wirkt also wie eine einzige convergente Linse. Ein Punkt A links und in einer Entfernung von P gelegen, die grösser ist als die Brennweite $P'F'$ (man sehe den unteren Theil der Figur) hat zum conjugirten den Punkt B, rechts von F' gelegen, in dem sich $P'B$, die Parallele zu AP und die Gerade $q'F'$ schneiden, wobei letztere Gerade hindurchgeht durch den Punkt q', dem Schnittpunkt der zur Axe parallelen Geraden Aq mit der zweiten Hauptebene: einem in der nämlichen Distanz befindlichem Objecte, entspricht also das reelle und verkehrte Bild bB. Die Objective der Fernrohre, welche zur Erzielung achromatischer Bilder im Allgemeinen aus zwei sich berührenden Linsen von verschiedenen Glassorten zusammengesetzt werden, haben die Wirkung des betrachteten Systemes.

DRITTES KAPITEL.

Instrumente, die aus Linsen zusammengesetzt sind.

---

78. Ein dioptrisches Instrument kann ein einfaches oder ein zusammengesetztes sein: es ist ein einfaches, wenn seine Wirkungen durch eine einzige Linse von geringer Dicke praktisch (nicht blos theoretisch) erhalten werden können, zusammengesetzt im gegentheiligen Falle. Zu dieser Definition ist zweierlei zu bemerken: 1. Obgleich jedem nichttelescopischen Linsensysteme eine unendlich dünne Linse aequivalent ist (73), so sind doch nicht alle nichttelescopischen Instrumente einfache Instrumente, weil jene unendlich dünne Linse nicht immer unter solchen Bedingungen sich befindet, dass ihre Wirkung durch eine Linse von geringer Dicke, die man an ihre Stelle setzt, praktisch erhalten werden könnte. 2. Ein einfaches Instrument kann wie ein zusammengesetztes, aus mehreren Linsen bestehen; aber während bei den zusammengesetzten Apparaten die Anwendung mehrerer Linsen noth-

wendig ist, um die Bilder in der gewünschten Lage zu erhalten, hat diese Anwendung bei einfachen Instrumenten nur den Zweck diese Bilder schärfer und achromatisch zu machen.

Unter den einfachen Instrumenten sind einige dazu bestimmt, von den Objecten reelle Bilder zu entwerfen, andere, um zwischen das Auge des Beobachters und das Object gestellt, von diesem ein virtuelles Bild unter geeigneten Bedingungen zur Beobachtung derselben hervorzubringen.

Die zusammengesetzten Instrumente sind alle bestimmt, vor dem Auge angebracht zu werden, um von Objecten, die eine zu kleine scheinbare Grösse besitzen, um direct beobachtet werden zu können, virtuelle vergrösserte Bilder zu erzeugen. Ein Object kann eine kleine scheinbare Grösse haben, entweder weil es an sich klein ist, oder weil es sich in sehr grosser Entfernung befindet; im ersten Falle ist das zusammengesetzte Instrument, welches das Sehen vermittelt, ein Mikroskop, im zweiten Falle ein Fernrohr.

Erste Abtheilung.

Einfache Instrumente.

§ 1. *Einfache Instrumente, die reelle Bilder geben.*

79. Wenn ein Object aA vor eine convergente Linse (Artikel 74, a, Fig. 37) oder vor ein convergentes System von Linsen (Artikel 77, a, Fig. 44) gestellt wird in einer Entfernung von der ersten Hauptebene, die grösser ist als die Brennweite, so entsteht von diesem ein reelles verkehrtes Bild bB, das jenseits des zweiten Brennpunktes in einer Entfernung $F'b$ von diesem liegt, umgekehrt proportional der Entfernung aF des Objectes vom ersten Brennpunkt, und grösser oder kleiner ist als das Object, jenachdem aF kleiner oder grösser ist als die Brennweite. Alle Instrumente, die bestimmt sind reelle Bilder zu erzeugen, gründen sich auf dieses Prinzip. Folgende sind die wichtigsten.

a) Die camera obscura. Der dioptrische Theil dieses Instrumentes, das Objectiv ist meistentheils aus zwei achromati-

schen Linsen zusammengesetzt. Jede derselben ist ein System von zwei Linsen, einer convexen aus Crownglas und einer concaven aus Flintglas, die sich berühren und zusammen ein convergentes System bilden, wie das im Artikel 77 d) (Fig. 47) beschriebene. Die beiden achromatischen Linsen werden sodann gegeneinander so gestellt wie die beiden Linsen des im Artikel 77 a) (Fig. 44) untersuchten Sytemes, bilden also ein convergentes System, dessen Fundamentalpunkte im Allgemeinen in der Ordnung F, P', P, F' aufeinanderfolgen. Eine derartige Anordnung bezweckt die Verminderung der sphärischen Aberration, und die Gründe die hiefür massgebend sind, können hier nicht näher erörtert werden. Das Objectiv ist in der Oeffnung einer der Wände, eines sonst allseitig geschlossenen und daher dunkeln Raumes angebracht und gibt von äusseren Objecten, die sich in geeigneter Entfernung befinden, Bilder, welche man auf einer Ebene auffängt, sei es nun um sie zu zeichnen, indem man den Conturen mit einem Bleistift nachfährt, sei es um sie auf die empfindliche Schicht einer photographischen Platte wirken zu lassen. In diesem letzteren, dem wichtigsten Falle, wird der geschlossene Raum durch einen parallelepipedischen Kasten von Holz gebildet, von dem eine der Wände in ihrer Mitte das Objectiv trägt. Die gegenüberliegende Wand besteht aus einer mattgeschliffenen Glastafel, auf welcher die Bilder sich erzeugen, und die man nach Belieben entfernen kann, um an ihre Stelle den Rahmen zu setzen, der die präparirte Platte enthält. Damit die Bilder immer auf der rückwärtigen Wand der camera obscura zu Stande kommen, auch wenn die Entfernung des Objectes innerhalb gewisser Grenzen geändert wird, ist es nothwendig, dass diese Wand beweglich sei und dem Objective mehr oder weniger genähert werden könne; desshalb pflegt man den Kasten aus zwei Theilen herzustellen, einem fixen und einem beweglichen, der mehr oder weniger in jenen hineingeschoben werden kann. Ueberdiess kann eine der beiden achromatischen Linsen des Objectives mittelst eines Triebes der anderen genähert oder von ihr entfernt werden; hiedurch wird es möglich die Fundamentalpunkte des Sytemes etwas zu verändern und somit dem reellen Bilde, das auf die rückwärtige Wand fallen muss, kleine Verschiebungen zu ertheilen.

b) Die Projectionsapparate. Diese erzeugen von kleinen transparanten Objecten, wie z. B. auf Glas gemalte Bilder oder Photographieen auf Collodium etc. vergrösserte Bilder. Auf eine Linse von kurzer Brennweite fällt Sonnenlicht, oder das Licht des galvanischen Flammenbogens, einer Drummond'schen oder auch einer gewöhnlichen Lampe, und wird auf das Object concentrirt, das verkehrt in die Nähe des Brennpunktes dieser Linse gestellt ist. Das Licht, nachdem es die verschiedenen Theile des Objetes je nach dem Grade ihrer Durchsichtigkeit durchsetzt, trifft auf eine zweite convergente Linse oder auf ein convergentes System, dessen erste Hauptebene von dem Objecte um etwas mehr als die Brennweite entfernt ist. Das System gibt daher ein aufrechtes Bild des Objectes, das einem zahlreichen Auditorium sichtbar gemacht werden kann, indem man es auf einen weissen Schirm, der das Licht nach allen Richtungen zerstreut, auffängt. Das Zusammenfallen der Ebene des Bildes mit der des Schirmes wird durch Verschiebung der Linse mit Hilfe eines Triebes erreicht.

c) Das Sonnenmikroskop und das für electrisches Licht eingerichtete Mikroskop unterscheiden sich nicht wesentlich von den Projections-Apparaten. Sonnenlicht oder das Licht des mittelst Regulator fixirten galvanischen Flammenbogens, wird durch ein System von zwei convergenten Linsen auf das Object concentrirt, das zwischen zwei Glasplatten eingeschlossen ist. Das dioptrische System, durch welches das Bild dieses Objectes projicirt werden soll, besteht gewöhnlich aus drei convergenten Linsen und kann vermittelst eines Triebes und gezahnter Stange vor- oder rückwärts geschoben werden.

Bei allen diesen Apparaten nennt man Vergrösserung das Aehnlichkeitsverhältniss des reellen Bildes und des Objectes, oder (Fig. 37 und 44) das Verhältniss $\frac{Bb}{Aa}$. Zur Berechnung desselben dienen die Formeln (II''), (II') des Artickels 61, welche, mit m die Vergrösserung bezeichnet, geben

$$m = \frac{x'}{x}, \text{ oder auch } m = 1 - \frac{x'}{\varphi} = -\left(\frac{x'}{\varphi} - 1\right).$$

Die Buchstaben x, x', φ haben hierin ihre gewöhnliche Bedeutung

und ihr Vorzeichen bestimmt sich nach der oben getroffenen Uebereinkunft. Die erste der Formeln sagt, dass die Vergrösserung gleich ist dem Verhältniss der Entfernung des Bildes von der zweiten Hauptebene zur Entfernung des Objectes von der ersten Hauptebene. Die zweite zeigt, dass der absolute Werth der Vergrösserung gleich ist dem um die Einheit verminderten Verhältnisse der Entfernung des Bildes von der zweiten Hauptebene zur Brennweite des dioptrischen Systemes. Das negative Vorzeichen, mit dem das zweite Glied dieser Formel behaftet erscheint, lässt erkennen, dass das Bild bezüglich des Objectes ein umgekehrtes ist.

Wenn x' kleiner als x, ist m kleiner als Eins und das Bild ist kleiner als das Object und was wir Vergrösserung genannt haben, wird in Wirklichkeit eine Verkleinerung. Dieser Fall trifft fast immer für die camera obscura zu.

§ 2. *Einfache Instrumente die virtuelle Bilder geben.*

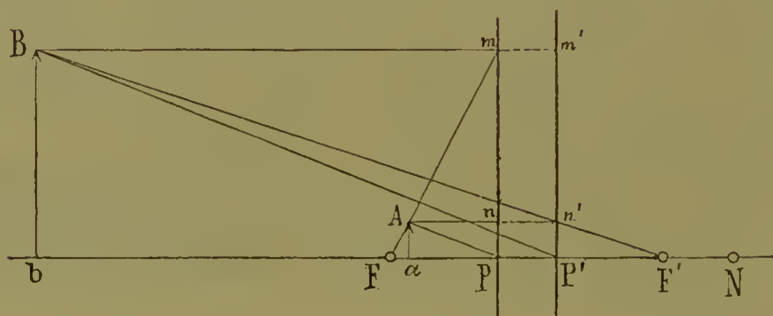
80. Instrumente die bestimmt sind virtuelle Bilder zu geben sind das einfache Mikroskop und die Brillengläser.

Das einfache Mikroskop. Convergente Linsen und convergente Systeme von Linsen können dazu dienen, Objecte, die sich in sehr kleiner Entfernung vom Auge befinden, deutlich, also kleine Objecte unter einem grossen Sehwinkel und daher vergrössert zu sehen.

Zu diesem Zwecke muss das Object zwischen dem ersten Brennpunkt und dem ersten Hauptpunkt der Linse gestellt werden. Ist (Fig. 48) aA das Object und sind, F, F', P, P' die beiden Brennpunkte und die beiden Hauptpunkte des Systemes, dann wird der Einfallsgeraden AP, die durch den ersten Hauptpunkt geht, die zu ihr parallele Austrittsgerade $P'B$, durch den zweiten Hauptpunkt gezogen, entsprechen; den Einfallsgeraden FAm, An, von denen die erste durch F geht und die zweite parallel zur Axe ist, werden die zur Austrittsgeraden $m'mB$, und $n'F'$ entsprechen, wo erstere parallel Axe, letztere durch F' geführt ist. Der Schnittpunkt B der einen dieser beiden Geraden mit $P'B$ ist dann der zu A conjugirte Punkt und bB das Bild des Objectes aA. Im Falle einer unendlich dün-

nen Linse ist die Construction im Artikel 74, Fig. 38 gezeigt worden. Das Bild bB ist ein virtuelles und aufrechtes und das Sehen wird ein deutliches sein, wenn sich bB in einer Entfernung vom Auge befindet, die gleich ist jener, auf welche das Auge accommodirt ist.

Fig. 48.



Ein derartig wirkendes convergentes System nennt man ein einfaches Mikroskop. Besteht dieses Instrument nicht aus einer einzigen Linse, sondern ist es, wie diess am häufigsten vorkommt, aus zwei Linsen zusammengesetzt, wie sie im Artikel 77 a) (Fig. 44) betrachtet wurden, so heisst es ein Duplet (Doublet).

81. Der Mittelpunkt oder Kreuzungspunkt des Auges liege in N; ist das Sehen ein Deutliches, so wird Nb die Distanz sein, auf welche das Auge accommodirt ist. Wir bezeichnen diese Distanz mit δ und mit δ' die deutliche Sehweite desselben Auges. Würde der Beobachter das Object aA mit blossem Auge betrachten, so würde dasselbe die scheinbare Grösse $\frac{Aa}{\delta'}$ haben; durch das Instrument sieht er an Stelle des Objectes dessen Bild Bb unter der scheinbaren Grösse $\frac{Bb}{\delta}$: das Verhältniss dieser zweiten scheinbaren Grösse zur ersten gibt die Vergrösserung des einfachen Mikroskopes an. Nennen wir dieselbe m, so haben wir also

$$m = \frac{Bb}{Aa} \cdot \frac{\delta'}{\delta}.$$

Nun wird aber, wenn wir mit φ die Brennweite des dioptrischen Systemes, mit d die Entfernung $P'N$ des Kreuzungspunktes N des

Auges vom zweiten Hauptpunkte bezeichnen und die zweite der Formeln (II′) des Artikel 61 in Anwendung bringen, wobei zu bemerken kommt, dass wegen der getroffenen Uebereinkunft bezüglich der Vorzeichen, die Distanz $P'b$ negativ zu nehmen ist

$$\frac{Bb}{Aa} = 1 + \frac{bP'}{\varphi} = 1 + \frac{\delta - d}{\varphi},$$

und daher

$$m = \left(1 + \frac{\delta - d}{\varphi}\right)\frac{\delta'}{\delta}. \tag{1}$$

Dieser Werth von m hängt ab von den Werthen des d, des δ' und des δ.

1. Die Vergrösserung wächst, wenn d abnimmt, d. h. indem man das Auge dem Instrumente nähert. Ihr grösster Werth tritt ein für $d = o$ und ist

$$M = \frac{\delta'}{\delta} + \frac{\delta'}{\varphi}.$$

2. Bleibt das Verhältniss $\frac{\delta'}{\delta}$ constant, so wächst die Vergrösserung mit δ'.

3. Die Vergrösserung nimmt ab mit wachsendem δ, wenn der Mittelpunkt des Auges zwischen der Linse und ihrem Brennpunkte sich befindet, sie nimmt zu, wenn dieser Mittelpunkt weiter als der Brennpunkt von der Linse entfernt ist.

In der That, die Gleichung (1) lässt sich auch so schreiben:

$$m = \frac{\delta'}{\varphi}\left(1 + \frac{\varphi - d}{\delta}\right),$$

und der zweite Theil dieses Ausdruckes für m, der positiv ist im ersten Falle, und negativ im zweiten, nimmt ab mit wachsendem δ.

Für $\delta = \delta'$ ist

$$m = 1 + \frac{\delta' - d}{\varphi}, \tag{1'}$$

für $\delta = \infty$ hingegen

$$m = \frac{\delta'}{\varphi}. \tag{1''}$$

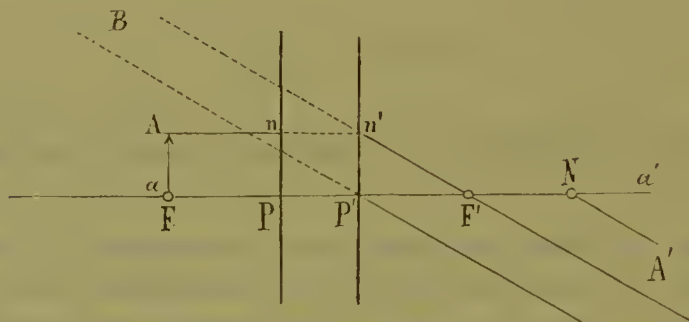
Beide Werthe von m wachsen gleichzeitig mit δ', sind also grösser für Weitsichtige als für Kurzsichtige.

Da man beim Betrachten naher Objecte das Auge gewohnheitsmässig auf den Nahepunkt accommodirt, so wird die Annahme, unter welcher die Gleichung (1′) gilt, dem gewöhnlich eintretenden Falle entsprechen.

Die Gleichung (1″) zeigt, dass bei Accommodation auf unendliche Entfernung die Vergrösserung unabhängig von d ist.

Diese Gleichung kann man auch leicht direct beweisen. In der That, unter der Annahme eines auf unendliche Entfernung accommodirten Auges werden die Strahlen, die von irgend einem Punkte A des Objectes ausgehen (Fig. 49), parallel zu einander aus dem Instrumente treten müssen und desshalb muss das Object in der

Fig. 49.



Brennebene AF liegen. Im Auge kommt dann das Bild des Punktes A im Schnittpunkte der Retina mit der zu AP parallelen Sehlinie NA' zu Stande, während das Bild des Punktes a auf der zu aP parallelen Sehlinie Na' liegt; das Object erscheint also unter dem Sehwinkel APF oder $\frac{Aa}{\varphi}$. Mit blossem Auge würde man aber das Object aus der Distanz δ' betrachten und unter dem Sehwinkel $\frac{Aa}{\delta'}$ erblicken; daher ist die Vergrösserung $\frac{Aa}{\varphi} : \frac{Aa}{\delta'}$ oder

$$m = \frac{\delta'}{\varphi} \cdot$$

82. Es ist nothwendig die Vergrösserung, die wir soeben betrachtet haben, und die jene ist, welche wirklich ein Mass für die

Fähigkeit des einfachen Mikroskopes abgibt, das Sehen kleiner Objecte zu vermitteln, von der scheinbaren Vergrösserung zu unterscheiden, welche die Linsen geben, wenn man sie in grösserer Entfernung vom Auge hält und dieses die vom betrachteten Objecte seitwärts gelegenen Objecte sieht, z. B. den Tisch auf dem ersteres sich befindet. In diesem Falle nämlich wird der Beobachter, indem er sich bewusst bleibt, dass auf jener Unterlage das Object sich befindet, auch dessen virtuelles Bild in dieselbe Entfernung verlegen; und da die linearen Grössen von Objecten, die sich in gleicher Distanz vom Auge befinden proportional sind ihren scheinbaren Grössen (56), so schätzt der Beobachter die lineare Dimension des Objectes ebenso vielmal grösser als sie wirklich ist, als die scheinbare Grösse des virtuellen Bildes die des Objectes enthält. Die scheinbare Vergrösserung ist also gleich dem Verhältnisse der scheinbaren Grösse des Bildes zur scheinbaren Grösse des Objectes. Bezeichnen wir sie mit m_1 und setzen wir $aP = h$, $PP' = \triangle$ (Fig. 48) so haben wir:

$$m_1 = \frac{Bb}{Nb} : \frac{Aa}{Na} = \frac{Bb}{Aa} \cdot \frac{Na}{Nb}.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreicke BbP', AaP ist aber

$$\frac{Bb}{Aa} = \frac{P'b}{Pa} = \frac{\delta - d}{h},$$

und da ferner

$$Na = d + \triangle + h, \quad Nb = \delta$$

ist, so wird

$$m_1 = \frac{\delta - d}{h} \frac{d + \triangle + h}{\delta}.$$

Aus Gleichung (I′) Art. 61 erhält man ferner

$$h = \frac{\varphi(\delta - d)}{\delta - d + \varphi};$$

substituirt man statt h diesen Ausdruck in den obigen Werth von m_1, so wird schliesslich nach einfachen Reductionen

$$m_1 = \frac{d(\delta - d - \triangle) + \varphi(\delta + \triangle) + \triangle\delta}{\varphi\delta}. \qquad (3)$$

Die Summe $d + (\delta - d - \triangle)$ ist soviel wie $\delta - \triangle$ und ändert sich daher nicht wenn d sich ändert. Nun weiss man aber, dass wenn die Summe zweier Grössen constant ist, ihr Product den grössten Werth annimmt, wenn sie einander gleich werden; der grösste Werth den das Product $d(\delta - d - \triangle)$ annehmen kann, ist daher jener, der einem Werthe von d entspricht, das der Gleichung

$$d = \delta - d - \triangle$$

genügt, d. h. dem Werthe

$$d = \frac{\delta - \triangle}{2}.$$

Dieser Entfernung der Linse vom Auge entspricht daher die grösste scheinbare Vergrösserung.

Ist die Linse sehr dünn, so dass $\triangle$ vernachlässigt werden kann, so wird

$$d = \frac{\delta}{2},$$

oder: die scheinbare Vergrösserung ist ein Maximum, wenn die Linse, deutliches Sehen vorausgesetzt, vom Auge um die halbe Entfernung absteht, auf welche das Auge accommodirt ist.

Am häufigsten wird es vorkommen, dass der Beobachter unbewusst das Auge auf die Distanz Na accommodirt, in der er das Object gelegen weiss. Dann erhält man das Maximum der scheinbaren Vergrösserung, wenn die dünne Linse in der Mitte zwischen Auge und Object sich befindet.

83. Brillengläser. Eine vor das Auge gestellte Linse bildet mit diesem zusammen ein dioptrisches System, dessen Fundamentalpunkte mit der Stellung und Form der Linse variiren. Durch geeignete Linsen kann man daher bewirken, dass für das zusammengesetze System auf die Retina die conjugirten Bilder von Objecten fallen, die ausserhalb der Grenzen des deutlichen Sehens liegen oder mit anderen Worten, man kann diese Grenzen abändern und bewirken, dass ein weitsichtiges Auge (54) deutlich zu sehen vermag in einer geringen Distanz, in welcher kleinere Objecte zur genaueren Betrachtung bequem gehalten werden können, oder dass ein kurzsichtiges Auge (54) in grossen Entfernungen noch deutlich

sehe. Linsen, die zu diesem Zwecke verwendet werden, nennt man Brillengläser.

Bei Untersuchung der Eigenschaften der Brillengläser können wir diese als unendlich dünne Linsen betrachten; es wird dann in jedem Falle leicht sein zu übersehen (73), welcher Art die sehr kleinen Aenderungen sind, die an den Ergebnissen anzubringen wären, falls man die immer sehr geringe Dicke der Linsen in Rechnung zieht.

Indem wir die Form der Linsen angeben wollen, die sich für das deutliche Sehen eines bestimmten Individuums eigenen, unterscheiden wir die beiden Fälle: Weitsichtigkeit und Kurzsichtigkeit.

Erster Fall. Die Brillengläser für einen Fernsichtigen sollen es diesem, der mit blossem Auge nur in Entfernungen, die grösser sind als eine gegebene δ_1, deutlich zu sehen vermag, und wobei δ_1 grösser ist als die normale deutliche Sehweite, ermöglichen, ein Object mit kleinen Details z. B. die Seite eines Buches deutlich zu sehen, wenn dieses Object in einer zum Halten bequemen Entfernung sich befindet, in der zugleich die kleinen Details um die es sich handelt, unter einem genügend grossen Gesichtswinkel erscheinen; diese Entfernung ist für künstliche Objecte eben jene des Nahepunktes eines normalen Auges, die wir mit δ bezeichnen. Die Linse muss demnach so beschaffen sein, dass sie von einem um δ vom Auge entfernten Punkt, ein virtuelles Bild in der Entfernung δ_1 erzeugt. Setzen wir die Distanzen δ und δ_1 gemessen voraus vom ersten Knotenpunkt des Auges, oder auch vom Kreuzungspunkte N des reducirten Auges (Fig. 50) und bezeichnet überdiess d die Entfernung WN der Linse von diesem Knotenpunkte, so sind die Entfernungen der genannten conjugirten Punkte von der Linse

$$\delta - d \text{ und } \delta_1 - d.$$

Gibt man diesen Entfernungen das negative Vorzeichen, da sie in dem der Lichtbewegung entgegesetztem Sinne gemessen sind, und substituirt man sie an Stelle von x und x' in die Gleichung (I′) des Artikels 61, d. h. in

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\varphi}, \qquad \text{(I′)}$$

so wird

$$-\frac{1}{\delta_1 - d} + \frac{1}{\delta - d} = \frac{1}{\varphi},$$

und hieraus:

$$\varphi = \frac{(\delta_1 - d)(\delta - d)}{\delta_1 - \delta}. \qquad (1)$$

Für den Weitsichtigen ist δ_1 grösser als δ und somit ist, weil die beiden Factoren des Zählers immer positiv sind, φ positiv, die Linse muss convergent sein.

Nehmen wir d zu 25 Millimeter an, wie dieses nahezu der Wirklichkeit entspricht, und die normale Entfernung δ zu 25 Centimeter, so gibt die Gleichung (1) in Millimeter

$$\varphi = 225 \frac{\delta_1 - 25}{\delta_1 - 250}.$$

Für das mit einer convergenten Linse bewaffnete Auge wird Fernpunkt jener Punkt, dem bezüglich der Linse der Fernpunkt des unbewaffneten Auges conjugirt ist. Wenn dieses Auge emmetropisch ist, so fällt der Fernpunkt des mit Brille versehenen Auges in den vorderen Brennpunkt derselben, ist aber das Auge ein hypermetropes, so liegt dieser Punkt weiter entfernt aber im Allgemeinen nicht im Unendlichen. Weitsichtige Augen werden also durch Anwendung der Brillen gewöhnlich brachymetropisch.

84. Zweiter Fall. Ein kurzsichtiges Auge hat seinen Fernpunkt in einer endlichen, gewöhnlich kleinen Distanz δ_1. Um ein so gebildetes Auge zu corrigiren und dasselbe in den Zustand eines emmetropen Auges zu versetzen, muss man demselben eine Linse vorsetzen, die von einem unendlich weit entfernten Punkte ein virtuelles Bild in der Entfernung δ_1 vom Auge zu erzeugen vermag: der zweite Brennpunkt dieser Linse muss also mit dem Fernpunkt des Auges zusammenfallen. Hieraus ergibt sich, dass die Brennweite φ der Linse der Gleichung

$$\varphi = -(\delta_1 - d) \qquad (2)$$

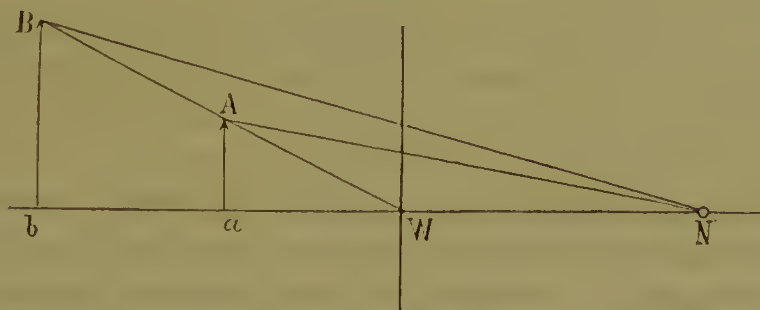
zu genügen hat. Da $\delta_1 - d$ immer positiv, ist φ negativ, und die Linse muss divergent sein.

Indem durch die Wirkung der Linse der Fernpunkt in's Unendliche rückt, entfernt sich nothwendigerweise auch der Nahepunkt. Für ein gesundes und jugendliches Auge überschreitet dieser Punkt gewöhnlich nicht die deutliche Sehweite des normalen emmetropischen Auges (54); wenn aber die Accommodationsweite deren das Auge fähig, kleiner ist als die normale, so kann es geschehen, dass das mit der Linse bewaffnete und emmetrop gewordene Auge gleichzeitig weitsichtig wird.

Es gibt brachymetrope Augen, für welche die Distanz δ_1 so klein ist, dass der Beobachter genöthiget wird, die Objecte dem Auge in unbequemer Weise zu nähern, und alsdann wendet er Brillengläser an, auch wenn kleine und nahe Gegenstände betrachtet werden sollen, so z. B. beim Lesen. Brillengläser die nach Gleichung (2) berechnet worden, können im Allgemeinen auch für diesen Fall Anwendung finden, aber es genügen hiefür weniger divergente Linsen und sind auch vorzuziehen. Die Anwendung weniger divergenter Gläser wird nothwendig, wenn das Auge nicht emmetrop gemacht werden kann ohne zugleich weitsichtig zu werden.

Will ein Kurzsichtiger sehr kleine Objecte betrachten, die, um unter genügend grossem Sehwinkel zu erscheinen, in eine kleinere Distanz vom Auge gebracht werden müssen, als die Entfernung des Nahepunktes beträgt, so benöthiget derselbe ebenfalls einer convergenten Linse; allein diess ist nicht der gewöhnliche Fall in dem Brillengläser angewendet werden.

Fig. 50.



85. Es sei aA (Fig. 50) ein Theil der zur Axe senkrechten Geraden, auf dem Objecte gelegen das man betrachtet und bB das

durch die Linse W entworfene virtuelle Bild dieses Theiles. Die scheinbare Grösse des mit blossem Auge in der Entfernung aN gesehenen Objectes wäre $\frac{Aa}{aN}$ oder, indem wir wieder mit δ die normale deutliche Sehweite aN bezeichnen, $\frac{Aa}{\delta}$; die scheinbare Grösse des Bildes ist hingegen $\frac{Bb}{bN}$ oder, indem wir die Distanz bN δ_1 nennen, $\frac{Bb}{\delta_1}$. Wer Brillengläser anwendet, hat gewöhnlich eine Vorstellung von der wirklichen Entfernung des Objectes und wird so, wie diess im Artikel 82 näher begründet wurde, dazu geführt, dem Objecte eine Grösse zuzuschreiben die sich zur wahren Grösse verhält, wie die zweite scheinbare Grösse zur ersten. Die Brillengläser geben somit eine scheinbare Vergrösserung. Nennen wir sie m, so werden wir haben:

$$m = \frac{bB}{aA}\,\frac{\delta}{\delta_1}.$$

Aber es ist

$$\frac{bB}{aA} = \frac{Wb}{Wa} = \frac{\delta_1 - d}{\delta - d};$$

und daher weiter

$$m = \frac{\delta_1 - d}{\delta - d} \cdot \frac{\delta}{\delta_1},$$

oder auch:

$$m = \frac{1 - \frac{d}{\delta_1}}{1 - \frac{d}{\delta}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass m grösser oder kleiner als die Einheit ist, jenachdem δ_1 grösser oder kleiner als δ ist; somit geben die Brillengläser der Weitsichtigen eine scheinbare Vergrösserung, jene der Kurzsichtigen hingegen eine scheinbare Verkleinerung. In beiden Fällen ist m umsomehr von der Einheit verschieden, je grösser die Entfernung d der Linse vom Auge ist.

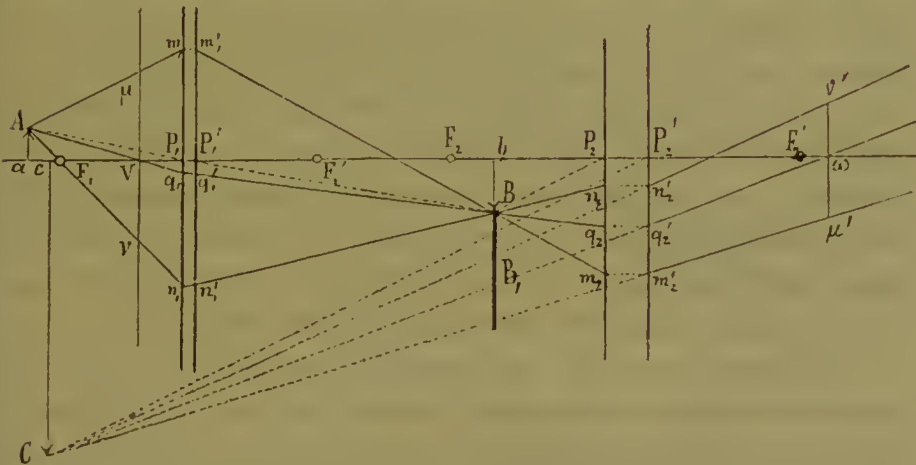
Zweite Abtheilung.

Zusammengesetzte Instrumente.

§ 3. *Allgemeines über die zusammengesetzten Instrumente.*

86. Alle zusammengesetzten Instrumente bestehen aus zwei optischen Systemen, von denen das eine das Objectiv, das andere das Ocular heisst. Ersteres ist immer convergent und gibt von dem Objecte, das beobachtet werden soll, ein reelles verkehrtes Bild; letzteres, das convergent oder divergent sein kann, dient zur Beobachtung dieses Bildes und wirkt wie ein einfaches Mikroskop.

Fig. 51.



Die Figuren 51 und 52 zeigen die Anordnung und die Wirkungsweise der zusammengesetzten Instrumente im Allgemeinen. In beiden Figuren sind F_1, P_1, P_1', F_1' die Fundamentalpunkte des Objectives, F_2, P_2, P_2', F_2' jene des Oculares; während aber in der ersten Figur das Ocular als ein convergentes vorausgesetzt wurde, ist es in der zweiten als divergent angenommen; in der ersten liegt daher F_2 links von P_2 und F_2' rechts von P_2'; in der zweiten dagegen ist F_2 zur Rechten von P_2 und F_2' zur Linken des bezüglichen Hauptpunktes P_2'.

Das Object befindet sich links von F_1, das Auge rechts vom Ocular. Vom Objecte aA erzeugt das Objectiv ein reelles und ver-

kehrtes Bild bB (74) und die Entfernungen des Objectes und der Linsen werden so regulirt, dass von dem Bilde bB das Ocular ein zweites Bild cC erzeugt in einer Distanz vom Auge, die gleich kommt jener, für welche dasselbe accommodirt ist.

Wenn das Auge accommodirt ist für eine endliche, vor demselben gelegene Distanz, muss das Bild bB rechts von F_2 liegen. Alsdann wirkt das Ocular wie die im Artikel 74, 1 b) betrachtete Linse wenn es convergent, oder wie die im Artikel 74, 2 b) untersuchte Linse, wenn es divergent, ist und gibt von bB ein virtuelles und vergrössertes Bild. Dieser Fall wurde in den Figuren 51 und 52 vorausgesetzt und er tritt immer ein für brachymetrope und oft für emmetrope Augen.

Ist das Auge für unendliche Entfernung accommodirt, so muss das Bild bB in die durch F_2 gehende Brennebene fallen. Alsdann treten Strahlen die von irgend einem Punkte des Objectes aA kommen, parallel zu einander aus; beispielsweise werden jene, die vom Punkte A ausgehen, parallel zu BP_2 austreten; der Punkt C liegt im Unendlichen. Dieser Fall ist vorhanden, wenn ein emmetropisches Auge das Instrument benutzt und keine Accommodationsanstrengung macht; und er wird, weil er zu einfacheren Constructionen und Formeln führt, in den Untersuchungen über die Wirkungsweise der Instrumente als der normale Fall betrachtet.

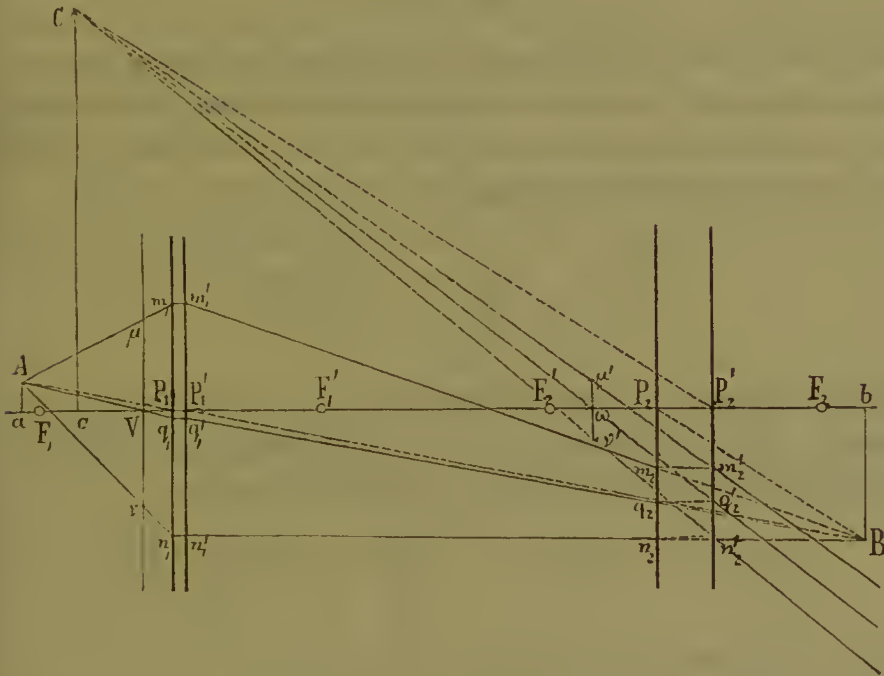
Ist endlich das Auge ein hypermetropes und für convergent einfallende Strahlen accommodirt, so muss das Bild bB links von F_2 zu liegen kommen. Das Ocular würde dann ein reelles Bild erzeugen, rechts vom Instrumente und hinter dem Kopfe des Beobachters gelegen, wenn dieser das Licht nicht auffinge; das Auge nähert dieses Bild und bewirkt, das es auf die Retina fällt. Dieser Fall ist zwar anormal, kann aber immerhin vorkommen.

In jedem Falle liegt das Bild des Punktes A, das sich auf der Retina erzeugt, im Schnittpunkte dieser mit der Geraden, welche den Kreuzungspunkt des Auges und den Punkt C verbindet. Man bemerkt sofort, dass durch das Instrument betrachtet, ein Object verkehrt oder aufrecht erscheint, jenachdem das Ocular convergent oder divergent ist.

87. Alle zusammengesetzten Instrumente haben den Zweck, ein

Object unter einem Sehwinkel betrachten zu können, der grösser ist als jener, unter dem dasselbe mit blossem Auge gesehen erscheinen würde. Das Verhältniss des Sehwinkels unter dem die Gerade cC gesehen wird, zu dem Sehwinkel unter dem die Gerade aA, mit blossem Auge betrachtet, erscheinen würde, heisst die Vergrösserung des Instrumentes.

Fig. 52.



Nennen wir wieder diese Vergrösserung m, die Distanz auf welche das Auge, während es durch das Instrument sieht, accommodirt ist δ, die Distanz in welcher das Object mit blossem Auge betrachtet würde δ', d die Entfernung des Kreuzungspunktes des Auges vom zweiten Hauptpunkte P_2' des Oculares, endlich D den absoluten Werth der Entfernung aP_1 des Objectes vom ersten Hauptpunkte des Objectives; dann ist der Sehwinkel unter dem cC mit Hilfe des Instrumentes erscheint $\frac{cC}{\delta}$, und jener, der dem mit blossem Auge gesehenen Objecte aA zukommt $\frac{aA}{\delta'}$; somit wird die Vergrösserung

$$m = \frac{cC}{\delta} : \frac{aA}{\delta'},$$

oder

$$m = \frac{cC}{aA} \cdot \frac{\delta'}{\delta}. \tag{1}$$

Wir können auch schreiben:

$$m = \frac{cC}{bB} \cdot \frac{bB}{aA} \cdot \frac{\delta'}{\delta}. \tag{1'}$$

Nun gibt die erste der Formeln (II') Artikel 61, indem man sie auf das Objectiv anwendet und beachtet, dass dem D, da es in dem der Lichtfortpflanzung entgegengesetztem Sinne gemessen ist, das negative Vorzeichen zukommt

$$\frac{bB}{aA} = \frac{1}{1 - \frac{D}{\varphi_1}} = - \frac{\varphi_1}{D - \varphi_1};$$

und die zweite der genannten Formeln (II') auf das Ocular angewendet, wieder beachtend, dass die Entfernung $P_2'c$ negativ in Rechnung zu bringen ist, liefert in ähnlicher Weise

$$\frac{cC}{bB} = 1 + \frac{P_2'c}{\varphi_2} = 1 + \frac{\delta - d}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2 + \delta - d}{\varphi_2}.$$

Durch Substitution dieser Werthe wird aus (1')

$$m = - \frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} \cdot \frac{\varphi_2 + \delta - d}{\varphi_2} \cdot \frac{\delta'}{\delta}, \tag{2}$$

und diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$m = - \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \frac{\delta'}{D - \varphi_1} \left(1 + \frac{\varphi_2 - d}{\delta}\right). \tag{2'}$$

Nachdem das Object immer links von F_1 liegt (86), ist die Differenz $D - \varphi_1$ immer positiv und folglich auch der Factor $\frac{\varphi_1}{D - \varphi_1}$. Da ferner das Bild cC bezüglich des Brennpunktes F_2' immer nach jener Seite hin liegt, nach welcher bezüglich des Auges der Punkt liegt,

auf dem dieses accommodirt ist, so wird $\varphi_2 + \delta - d$ immer gleiches Vorzeichen mit δ haben und demnach hat der Factor $\frac{\varphi_2 + \delta - d}{\varphi_2\, \delta}$ das Vorzeichen von φ_2. Hieraus folgt, dass m negativ ist, wenn φ_2 positiv, d. h. wenn das Ocular ein convergentes ist, dass hingegen m positiv wird, wenn φ_2 negativ, also das Ocular ein divergentes ist. Durch das Instrument gesehen erscheint somit das Object umgekehrt wenn ein convergentes, aufrecht, wenn ein divergentes Ocular angewendet wird.

Zu demselben Resultate wurden wir geführt durch Betrachtung der Constructionen, mittelst deren das Bild cC des Objectes aA gefunden wird (86).

Lassen wir die Distanz δ auf welche das Auge accommodirt ist, bis in's Unendliche wachsen, so nähert sich der Werth (2′) der Vergrösserung der Grenze

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \frac{\delta'}{D - \varphi_1}, \tag{3}$$

und da man die Bedingungen eines Instrumentes als die normalen betrachtet, wenn es für ein auf unendliche Distanz accommodirtes Auge eingestellt ist (86), so wird auch dieser durch (3) gegebene Grenzwerth m_1 als der normale Werth der Vergrösserung zu betrachten sein.

Bei Instrumenten mit starker Vergrösserung ist die Brennweite φ_2 sehr klein und umsomehr wird alsdann $\frac{\varphi_2 - d}{\delta}$ gegen die Einheit vernachlässigt werden können. Unter dieser Voraussetzung kann, welchen Werth auch δ haben mag, die Vergrösserung durch die einfachere Formel (3) berechnet werden.

Bezüglich des Werthes, der für δ' in die Formel zu setzen ist, unterscheiden wir zwei Fälle: das Instrument ist ein Mikroskop oder es ist ein Fernrohr.

Im ersten Falle wird man das Object, um es mit freiem Auge zu betrachten, in die Distanz des Nahepunktes bringen; δ' bedeutet demnach diese Distanz. Die Gleichung (3) zeigt, dass m_1 proportional ist dem δ'; die Vergrösserung des Mikroskopes ist also für Weitsichtige grösser als für Kurzsichtige.

Im zweiten Falle kann das Object dem Auge nicht genähert werden: man würde es mit freiem Auge aus derselben Entfernung betrachten, aus welcher man mittelst des Fernrohres darauf sieht und da gewöhnlich gegenüber dieser Entfernung die Länge des Fernrohres vernachlässigt werden kann, so wird man in die Gleichungen für m und m_1, $\delta' = D$ zu setzen haben und erhält so

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{D}{D-\varphi_1}\left(1+\frac{\varphi_2-d}{\delta}\right), \tag{4}$$

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{D}{D-\varphi_1}. \tag{5}$$

Ist, wie gewöhnlich, die Entfernung D des Objectes sehr gross, so können wir für $\dfrac{D}{D-\varphi_1}$ den Grenzwerth setzen, dem dieser Quotient für ein unendlich gross werdendes D zustrebt. Dieser Grenzwerth ist aber $= 1$, folglich hat man für Fernrohre mit denen sehr weit entfernte Gegenstände betrachtet werden:

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(1+\frac{\varphi_2-d}{\delta}\right), \tag{6}$$

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{7}$$

88. Es sei V der Scheitel der ersten Oberfläche des Objectives und $V\mu = V\nu$ der Radius des Kreises, der diese Oberfläche begrenzt oder die halbe Oeffnung des Objectives (Fig. 51 u. 52). Von den Strahlen die irgend ein Punkt A des Objectes aussendet, betrachten wir spezieller die drei Strahlen AV, $A\mu$, $A\nu$ und verfolgen ihren Weg durch das dioptrische System; nach ihrem Austritte aus dem Objectiv sind diese Strahlen beziehungsweise $q_1'Bq_2$, $m_1'Bm_2$, $n_1'Bn_2$ und nach dem Austritte aus dem ganzen Systeme geben sie die Austrittsgeraden $Cq_2'\omega$, $Cm_2'\mu'$, $Cn_2'\nu'$. Von den Strahlen die A aussendet gelangen jene in das Instrument, die in dem Kegel $A\mu\nu$ enthalten sind, dessen Basis die Vorderfläche des Objectives bildet; sie erzeugen aus dem Objective austretend den Kegel $Bm_1'n_1$ und aus dem Oculare tretend den Kegel $Cm_2'n_2'$. Die Axe des

Kegels $A\mu\nu$ ist AV, die des Kegels $Bm_1'n_1'$ ist $q_1'q_2$ und die des Kegels $Cm_2'n_2'$ ist die dem einfallenden Strahle AV entsprechende Austrittsgerade $Cq_2'\omega$. In ähnlicher Weise erzeugen die von irgend einem anderen Punkte des Objectes ausgegangenen Strahlen nach ihrem Austritte ein Strahlenbündel, dessen Axe immer jene Austrittsgerade ist, die dem durch V gehenden Einfallsstrahle entspricht. Die Axen aller dieser austretenden Bündel sind also Austrittsgerade, die den durch V hindurchgehenden Einfallsgeraden entsprechen, und schneiden sich desshalb in einem und demselben Punkte, dem zu V conjugirten Punkte (26). Dieser Punkt ist der Schnitt ω der Geraden Cq_2' mit der Axe.

Damit nun in das Auge von den aus A ausgegangenen Strahlen möglichst viele eintreten können, muss der Mittelpunkt der Pupille auf $C\omega$, der Axe des austretenden Bündels liegen. Um ebenso von dem Lichte, das ein anderer Punkt des Objectes aussendet, einen möglichst grossen Theil aufzufangen, wird der Mittelpunkt der Pupille auf der Axe des Austrittskegels liegen müssen, der jenem Punkte entspricht. Um daher von dem Lichte, das alle Punkte des Objectes aussenden, möglichst viel zu erhalten, wird der Mittelpunkt der Pupille im Punkte ω liegen müssen, durch den die Axen aller austretenden Bündel hindurchgehen. Aus diesem Grunde hat Biot den zum Scheitel der Vorderfläche des Objectives conjugirten Punkt ω, den Ort des Auges oder den Augenpunkt genannt.

Um die Lage des Augenpunktes zu finden, genügt es, mit Hilfe der im Artikel 60 gegebenen Regeln die Bahn eines Strahles durch das System zu zeichnen, der von V ausgeht; oder auch mit Hilfe der Constructionen, die in demselben Artikel 60 gezeigt wurden, die Ebene zu finden, die der Ebene $\mu V\nu$ conjugirt ist, oder endlich die Lage dieser conjugirten Ebene mit Hilfe der Formeln des Artikels 61 zu berechnen. Wenn die Distanz VP_1, sehr klein ist gegen die Distanz $P_1'P_2$, wie diess immer bei den Fernrohren zutrifft, so kann man die Rechnung vereinfachen und einen hinreichend genauen Werth erhalten, indem man V mit P_1 coincidiren lässt. Unter dieser Voraussetzung fällt der zu V bezüglich des Objectives conjugirte Punkt mit P_1' zusammen und

um ω zu erhalten, hat man nur den zu P_1' bezüglich des Oculares conjugirten Punkt zu suchen. Ist d die gesuchte Distanz $P_2'\omega$ und $\triangle$ der Abstand $P_1'P_2$ der ersten Hauptebene des Oculares von der zweiten Hauptebene des Objectives und beachtet man, dass nach der über die Vorzeichen getroffenen Uebereinkunft $\triangle$ als negativ zu betrachten ist, so folgt aus (I') des Artikels 61

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{\triangle}=\frac{1}{\varphi_2},$$

und somit

$$d=\frac{\varphi_2\triangle}{\triangle-\varphi_2}. \tag{8}$$

In den zusammengesetzten Instrumenten ist $\triangle - \varphi_2$ immer positiv und somit sagt diese Formel, dass d positiv oder negativ wird, je nachdem die Brennweite φ_2 positiv oder negativ ist; ist das Ocular convergent, so liegt der Augenpunkt zur Rechten von P_2', ist das Ocular ein divergentes, so liegt er zur Linken von P_2'; im ersten Falle befindet sich dieser Punkt meistens ausserhalb, im zweiten Falle innerhalb des Instrumentes; er hat immer diese Lagen, wenn das Ocular aus einer einzigen Linse besteht.

89. Die zur Axe senkrechte Ebene durch den Punkt ω ist conjugirt zur Tangentenebene $\mu V\nu$ an die erste brechende Fläche des Instrumentes, die Punkte μ', ν' in denen die erstere Ebene von Austrittsgeraden Cm_2', Cn_2' geschnitten wird, die den Einfallsgeraden $A\mu$, $A\nu$ entsprechen, sind conjugirt den Punkten μ, ν und der in dieser Ebene mit dem Radius $\omega\mu'$ aus ω als Centrum beschriebene Kreis ist das Bild des Kreises $\mu\nu$, der die Vorderfläche des Objectives begrenzt. Allen Einfallsgeraden, die durch das Innere des Kreises gehen, entsprechen daher Austrittsgerade, die den Kreis $\mu'\nu'$ innerhalb seiner Peripherie treffen; alle Lichtstrahlen, welche in das Instrument treten, müssen, wenn sie überhaupt austreten, nach Geraden das Instrument verlassen, welche die Ebene $\mu'\nu'$ in Punkten der Kreisfläche $\mu'\nu'$ schneiden. Alle austretenden Strahlbündel, von welchem Punkte sie auch ausgegangen sein mögen, passiren durch diese Kreisfläche wie durch eine Kreisöffnung in einer Blendung. Biot hat diesen Kreis den Ocularkreis (Ocularring, anneau oculaire) genannt.

Wenn der Augenpunkt sich ausserhalb des Instrumentes befindet, so pflegt man etwas vor demselben ein Diaphragma zu stellen, das in der Mitte eine kreisförmige Oeffnung besitzt, von grösserem Radius als der des Ocularkreises; das Auge muss dann an dieses Diaphragma gehalten werden, um die grösstmögliche Lichtmenge aufnehmen zu können. Liegt jedoch der Augenpunkt im Innern des Instrumentes, so wird sich das Auge unter um so günstigeren Verhältnissen befinden, je näher es sich der letzten Oberfläche stellt.

Um den Radius des Ocularkreises zu berechnen, hat man nur die Formeln (II′) des Artikels 61 zuerst auf das Objectiv anzuwenden, indem man als leuchtenden Punkt μ annimmt, sodann auf das Ocular, wobei als leuchtender Punkt zu betrachten ist der zu μ bezüglich des Objectives conjugirte Punkt, und der zu letzterem conjugirte Punkt wird dann μ' sein. Nennt man v die Distanz VP_1, R die halbe Oeffnung des Objectives $V\mu$, R_1 die Entfernung des zu μ bezüglich des Objectives conjugirten Punktes von der Axe, r den Radius des Ocularkreises und d wie früher die Distanz $P_2'\omega$, und beachtet dass v mit negativem Vorzeichen in Rechnung zu bringen ist, so erhält man aus der ersten der Gleichungen (II′) auf das Objectiv angewendet:

$$\frac{R}{R_1} = 1 - \frac{v}{\varphi_1},$$

und aus der zweiten, auf das Ocular angewendet:

$$\frac{r}{R_1} = 1 - \frac{d}{\varphi_2}.$$

Dividirt man nun die erste dieser Gleichungen durch die zweite, so wird

$$\frac{R}{r} = \frac{\varphi_1 - v}{\varphi_2 - d} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \tag{9}$$

Für $v = o$ reducirt sich diese Gleichung auf

$$\frac{R}{r} = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 - d}, \tag{9'}$$

und wenn man hierin für d seinen Werth aus (8) setzt, so erhält man

$$\frac{R}{r} = -\frac{\triangle - \varphi_2}{\varphi_2}. \tag{9''}$$

oder auch

$$\frac{R}{r} = -\frac{\triangle}{d}. \tag{9'''}$$

Das Zeichen — sagt, dass für ein positives d der Ocularkreis ein verkehrtes Bild der Peripherie der Vorderfläche des Objectives ist.

Die letzte Formel kann man direct beweisen indem man beachtet, dass für $v = o$ die Punkte m_1' und μ' einander bezüglich des Oculares conjugirt sind und daher die Geraden $m_1'P_2$, $P_2'\mu'$ zu einander parallel sein würden. Es entstünden so die beiden ähnlichen Dreiecke $m_1'P_1'P_2$, $\mu'\omega P_2'$, die unmittelbar die Proportion (9‴) geben.

90. Wir haben noch eine Beziehung anzugeben, die zwischen dem Verhältnisse $\frac{R}{r}$ und der Vergrösserung m stattfindet. Die Punkte A und C (Fig. 51 und 52) sind einander conjugirt und die Punkte V und ω, μ und μ' ebenfalls; die Austrittsgeraden $C\omega$, $C\mu'$ entsprechen daher den Einfallsgeraden AV, $A\mu$. Auf die Winkel $VA\mu$, $\omega C\mu'$ können wir daher den Satz anwenden, der ganz allgemein im Artikel 33 bewiesen wurde und der für den Fall von Linsencombination durch (III′) Artikel 61 ausgedrückt wird; wir haben also:

$$\frac{\text{Winkel } VA\mu}{\text{Winkel } \omega C\mu'} = \frac{cC}{aA}.$$

Bezeichnen wir mit a die Entfernung aV, so ist ferner (13)

$$\text{Winkel } VA\mu = \frac{V\mu}{aV} = \frac{R}{a};$$

und wenn δ die Entfernung $c\omega$ bedeutet, auf welche das Auge, während es durch das Instrument blickt, accommodirt ist, so wird ferner

$$\text{Winkel } \omega C\mu' = \frac{\omega\mu'}{c\omega} = \frac{r}{\delta};$$

ist endlich δ' die Entfernung, aus welcher das Object mit blossem Auge betrachtet werden würde, so erhalten wir noch aus der Gleichung (I) des Artikel 87:

$$\frac{cC}{aA} = m\,\frac{\delta}{\delta'};$$

setzen wir nun diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, so gibt diese

$$\frac{R}{r} = m\,\frac{a}{\delta'}, \qquad (10)$$

worin für ein Fernrohr $a = \delta'$ gesetzt werden darf, so dass

$$\frac{R}{r} = m. \qquad (10')$$

wird.

Wir werden diese Gleichung noch auf einem anderen Wege erhalten, wenn wir uns spezieller mit dem Fernrohre beschäftigen werden.

91. Im Artikel 58 wurde auseinandergesetzt, dass wir, soweit es unsere Untersuchung erfordert, die Helligkeit des Gesichtseindruckes messen können durch die Menge des Lichtes, welche auf die Flächeneinheit des Bildes entfällt, das sich auf der Retina bildet, also durch den Quotienten aus der Lichtmenge, dividirt durch den Flächeninhalt des Bildes. Wird nun ein Object durch ein dioptrisches Instrument betrachtet, so hat diese Grösse im Allgemeinen einen Werth, der verschieden ist von jenem, den er hätte, wenn man dasselbe Object mit freiem Auge betrachtete. Sei C' der Werth entsprechend der Beobachtung mit freiem Auge und C'' der Werth entsprechend der Beobachtung mit Hilfe des Instrumentes, so nennt man den Quotienten $\frac{C''}{C'}$ die Helligkeit des Instrumentes. Wir haben zu zeigen, von welchen Elementen dieselbe abhängig, und zwischen welchen Grenzen sie eingeschlossen ist.

Zu diesem Zwecke ist es nöthig möglichst günstige Bedingungen vorauszusetzen; wir werden annehmen, das Instrument sei so eingerichtet und das Object seiner Lage und Grösse nach so beschaffen, dass: 1. ein austretendes Strahlenbündel, das irgend einem Punkte

des Objectes entspricht, ganz durch die Pupille eintrete, wenn sein Querschnitt kleiner ist als die Fläche der letzteren, oder dass die Pupille ganz innerhalb des Bündels liege, wenn dessen Querschnitt grösser ist als die Fläche derselben; 2. von den Strahlen, die aus irgend einem Punkte des Objectes auf das Objectiv fallen, wenigstens alle jene austreten, die in die Pupillenöffnung gelangen können. Wir werden später sehen, innerhalb welcher Grenzen diese Bedingungen erfüllt sind. Befindet sich die Pupille in der Ebene des Ocularkreises, so ist der Schnitt der austretenden Bündel mit der Ebene der Pupille gleich dem Ocularkreise, wenn hingegen die Pupille anderswohin gestellt wird, so kann dieser Schnitt verschieden sein von dem Ocularkreise. Allein dieser Unterschied ist immer sehr klein und verschwindet ganz in dem Falle, den man als den normalen betrachtet, in dem nämlich das Instrument einem auf unendliche Entfernung accommodirten Auge angepasst ist; wir können ihn daher vernachlässigen. Dieses festgesetzt, unterscheiden wir zwei Fälle: den Fall, in dem der Ocularkreis kleiner und den, in welchem er grösser ist als die Pupille.

Im ersten Falle gelangt alles Licht, welches in das Instrument tritt, auch in das Auge. Wir nehmen als Object, wie gewöhnlich, einen Theil der zur Axe senkrechten Ebene aA, und die Intensität des ausgesandten Lichtes für diese Fläche constant, wir bezeichnen sodann mit J diese Intensität und mit σ die Fläche des Objectes, weiter, wie schon oben geschehen, mit δ' die Entfernung, aus welcher das Object ohne Instrument gesehen wird und mit a die Entfernung aV von der Vorderfläche des Objectives, in welche das Object gestellt wird, wenn man es durch das Instrument beobachtet, überdiess mit Ω die Oberfläche der Vorderfläche des Objectives, mit ω die Fläche des Ocularkreises, mit p die Fläche der Pupille, und mit s und S die Oberflächen der Bilder des Objectes auf der Retina, wenn dieses mit freiem Auge, beziehungsweise durch das Instrument betrachtet wird. Die Lichtmenge, welche durch die Pupille bei Beobachtung mit blossem Auge geht, ist $\frac{J\sigma p}{\delta'^2 s}$, und die Helligkeit des Gesichtseindruckes

$$C' = \frac{J\sigma p}{\delta'^2};$$

gebraucht man hingegen das Instrument, so ist die Lichtmenge, die das Auge empfängt, gleich der ganzen Lichtmenge, die auf das Objectiv fällt, d. i. $\frac{J\sigma\Omega}{a^2}$ und die Helligkeit des Netzhautbildes ist

$$C'' = \frac{J\sigma\Omega}{a^2 S}.$$

Bezeichnet man mit C die Helligkeit des Instrumentes, so wird

$$C = \frac{C''}{C'} = \frac{\Omega}{p}\left(\frac{\delta'}{a}\right)^2 \frac{s}{S},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$C = \frac{\omega}{p}\,\frac{\Omega}{\omega}\left(\frac{\delta'}{a}\right)^2 \frac{s}{S}.$$

Wenn wir wie früher, die Vergrösserung m heissen, so haben wir $\frac{s}{S} = \frac{1}{m^2}$; und wenn R und r die Radien des Objectives und des Ocularkreises sind, so ist weiter

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{R^2}{r^2},$$

und daher, wenn wir uns der Formel (10) Artikel 90 erinnern

$$\frac{\Omega}{\omega}\left(\frac{\delta'}{a}\right)^2 = m^2, \tag{10''}$$

hiermit aber erhalten wir durch Substitution

$$C = \frac{\omega}{p}, \tag{11}$$

d. h. ist der Ocularkreis kleiner als die Pupille, so verhält sich die Helligkeit des Gesichtseindruckes bei Anwendung des Instrumentes zu der bei Beobachtung mit freiem Auge, wie die Fläche des Ocularkreises zur Fläche der Pupille.

Wenn der Ocularkreis gleich der Pupillenöffnung, wenn $\omega = p$ wird, so folgt

$$C = 1, \qquad C'' = C',$$

die Helligkeit beim Sehen vermittelst des Instrumentes ist gleich der Helligkeit beim Sehen mit freiem Auge.

Ist, wie im zweiten Falle, der Ocularkreis grösser als die Pupille, so wird nicht mehr das ganze austretende Strahlenbündel ins Auge gelangen. Wir können dann die Fläche des Ocularkreises in zwei Theile getheilt denken mit Hilfe eines concentrischen Kreises, dessen Radius gleich dem der Pupille ist, und können uns ebenso die Vorderfläche des Objectives getheilt denken durch einen Kreis, dessen Bild eben jener Kreis ist, durch den wir den Ocularkreis getheilt haben. Die Strahlen, welche durch den centralen Theil des Objectives in das Instrument gelangen, treten durch den centralen Theil des Ocularkreises aus und gelangen in das Auge; die Strahlen hingegen, welche im äusseren Theile des Objectives eintreten, werden durch den äusseren ringförmigen Theil des Ocularkreises austreten, und können nicht in die Pupille gelangen; nur die ersteren Strahlen werden das Sehen vermitteln, die anderen sind unwirksam, man könnte sie ganz ausschliessen, indem man den äusseren Theil des Objectives bedeckt, ohne dass die Helligkeit geändert würde. Desshalb ist die Helligkeit des Instrumentes gleich derjenigen, die bei Gleichheit des Ocularkreises mit der Pupillenöffnung vorhanden wäre, d. h. es ist

$$C = 1.$$

Wir können also sagen, dass selbst abgesehen von der Lichtmenge, die durch die Gläser absorbirt wird, und vorausgesetzt, das Instrument sei so eingerichtet, dass alles Licht, welches sein Objectiv trifft, auch austrete, die Helligkeit des Gesichtseindruckes nicht grösser werden kann als sie für das unbewaffnete Auge ist; und dass zur Erreichung dieses Maximums dem Objective eine Oeffnung gegeben werden muss, nicht kleiner als jene, die zum Bestehen der Gleichung

$$\frac{\omega}{p} = 1 \tag{12}$$

nothwendig ist. Wird ϱ der Radius der Pupille genannt und die Gleichung (10) benutzt, so erhalten wir zur Bestimmung des Werthes R, den die halbe Oeffnung der ersten Fläche des Objectives haben soll, die Formel

$$\frac{R}{\varrho} = m\frac{a}{\delta'}. \tag{13}$$

Für ein Fernrohr wird $a = \delta'$ und die Gleichung reducirt sich auf

$$R = m\varrho. \tag{13'}$$

92. Wir haben der vorhergegangenen Rechnung die Voraussetzung zu Grunde gelegt, dass für alle Punkte des Objectes die beiden folgenden Bedingungen erfüllt seien:

1. dass durch die Pupille das ganze Bündel der austretenden Strahlen in das Auge gelangen, oder dass dieselbe doch ganz im Innern des Bündels liege;

2. dass von den Strahlen, die der betrachtete Punkt aussendet, wenigstens alle jene aus dem Instrumente treten, welche die Pupille aufzunehmen vermag.

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so wird die Helligkeit kleiner sein als die berechnete. Damit nun diese beiden Bedingungen erfüllt seien, ist es nothwendig, dass für keinem der Punkte A des Objectes aA der Winkel AP_1a einen bestimmten Werth ψ übersteige; es gibt nämlich eine Kegelfläche, die ihre Spitze im Punkte P_1 hat, deren Axe mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt, von bestimmtem Oeffnungswinkel 2ψ, und diese Kegelfläche besitzt die Eigenschaft, dass alle im Innern derselben gelegenen Objecte unter derselben, gleichförmigen und grössten Helligkeit gesehen werden, unter jener Helligkeit, deren Bestimmung wir angegeben haben, und dass alle ausserhalb dieser Fläche gelegenen Objecte unter einer geringeren Helligkeit erscheinen. Den Winkel 2ψ an der Spitze dieser Kegelfläche nennt man das Gesichtsfeld des Instrumentes. Um zu zeigen wie dieses Gesichtsfeld bestimmt werden könne, werden wir uns der Reihe nach mit zwei Fällen zu beschäftigen haben: wir werden zuerst voraussetzen, dass der Ocularkreis ausserhalb des Instrumentes liege, sodann, dass er innerhalb desselben gelegen sei. Auf den ersten Fall bezieht sich die Figur 51, auf den zweiten die Figur 52.

Liegt der Ocularkreis ausserhalb des Instrumentes und lässt man mit seinem Mittelpunkte den der Pupille zusammenfallen, so ist die erste Bedingung erfüllt, welches auch die Lage des leuch-

tenden Punktes sein mag; das Gesichtsfeld wird alsdann durch die zweite Bedingung allein bestimmt.

Wir setzen zuerst voraus, dass der Ocularkreis nicht grösser als die Pupille sei; unter dieser Annahme sind die Strahlen, die in die Pupille treten können, alle jene Strahlen, die auf das Objectiv fallen und die Bedingung, der wir zu entsprechen haben, reducirt sich darauf, dass alles Licht, das vom leuchtenden Punkte auf das Objectiv fällt, auch aus dem Oculare trete.

Betrachten wir einen Punkt A des Objectes (Fig. 51) und denken wir uns durch das ganze Instrument hindurch die Wege der äussersten Strahlen $A\mu$ und $A\nu$ verzeichnet; damit alles vom Punkte A auf das Objectiv entsendete Licht aus dem Oculare trete, ist es nothwendig, dass die Oeffnung einer jeden Linse hinreichend gross ist, um die beiden Strahlen hindurchzulassen. Wenn man daher die Anordnung des Apparates kennt, ist es leicht die Oeffnungen der Linsen so zu bestimmen, dass ein gegebener Punkt A noch unter der grössten Helligkeit gesehen wird. Haben die Linsen, oder hat nur eine von ihnen, kaum die so bestimmte Oeffnung, so befindet sich der Punkt A an der Grenze des Gesichtsfeldes und der Winkel AP_1a ist jener, den wir oben ψ nannten.

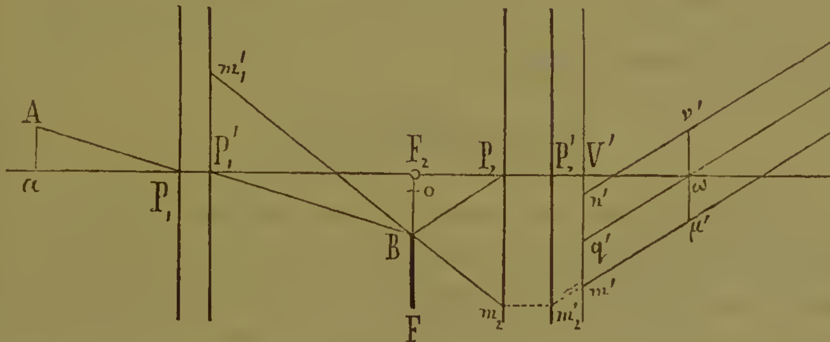
Ist umgekehrt die Oeffnung einer der Linsen des Oculares gegeben, so können wir bestimmen 1. die Oeffnung, welche den übrigen zu geben ist, damit die ganze Oberfläche ausgenützt wird, 2. das Gesichtsfeld.

Nehmen wir an, es sei die Oeffnung der äusseren Oberfläche des Oculares gegeben; es sei V' der Scheitel dieser Fläche und $V'm'$ die halbe Oeffnung derselben (Fig. 53). Machen wir ferner die Annahme, das Instrument sei für ein auf unendliche Distanz accommodirtes Auge eingestellt, wie es für diese Betrachtungen zulässig erscheint, dann wird das vom Objective erzeugte Bild in der Brennebene F_2F des Oculares liegen, die austretenden Bündel werden cylindrisch und haben die Peripherie des Ocularkreises $\mu'\nu'$ zur Leitlinie. Wir ziehen die Gerade $m'\mu'$ und durch die Punkte ω und ν' die Geraden $q'\omega$, $n'\nu'$ parallel zur ersteren; das cylindrische Strahlenbündel $m'\mu'n'\nu'$ ist unter allen, die vollständig aus dem Oculare treten, das am meisten gegen die optische Axe geneigte, $q'\omega$ ist

seine Axe, $m'\mu'$ der äusserste Strahl desselben. Wird dieser nach links hin durch das ganze System hindurch fortgesetzt, bis zum Objectiv, so bestimmen seine Schnitte mit den aufeinanderfolgenden Linsenflächen die kleinsten Oeffnungen, welche dieselben erhalten müssen. Wir können diese Bestimmungen nicht durchführen, ohne dass die Lagen der Linsen gegeben sind, allein die sehr einfachen Constructionen, die in jedem speziellen Falle hierzu dienen werden, sind uns bereits bekannt.

Um das Gesichtsfeld zu finden, ziehen wir $P_2 B$ parallel zu $\mu' m'$ und durch den Punkt B, in welchem diese Gerade die Brennebene $F_2 F$ schneidet, ziehen wir $B P_1'$; der Winkel $F_2 P_1' B$ ist jener, den wir ψ genannt haben und das Gesichtsfeld ist das Doppelte dieses

Fig. 53.



Winkels. In der That, würde sich das Licht von der Rechten zur Linken fortpflanzen, so würde das cylindrische Bündel $m'\mu'n'\nu'$ durch das Ocular in ein im Punkte B convergirendes Bündel verwandelt und durch das Objectiv in ein Bündel, das nach dem zu B conjugirten Punkte convergirt, welcher Punkt auf der zu $B P_1'$ parallelen Geraden $P_1 A$ liegt; kommt also das Licht von diesem auf $A P_1$ gelegenen Punkte des Objectes, so tritt es als das cylindrische Bündel $m'\mu'n'\nu'$ aus.

Was wir auf graphischem Wege gefunden haben, lässt sich ebenso leicht durch Rechnung bestimmen. Wir haben

$$\psi = B\widehat{P_1'}F_2 = \frac{F_2 B}{P_1' F_2};$$

die ähnlichen Dreiecke $F_2 P_2 B$, $V' \omega q'$ geben

$$F_2 B = \frac{V'q' \times F_2 P_2}{V' \omega},$$

daher ist

$$\psi = \frac{V'q' \times F_2 P_2}{V' \omega \times P_1' F_2}.$$

Nennen wir nun, wie bisher, die Brennweite des Oculares φ_2, die Distanz $P_1' P_2$ der ersten Hauptebene des Oculares von der zweiten des Objectives $\triangle$, die Entfernung $P_2' \omega$ des Augenpunktes von der zweiten Hauptebene des Oculares d und den Radius des Ocularkreises r; ist ferner R' die halbe Oeffnung $V'm'$ der letzten Ocularlinse und v' die Distanz $P_2' V'$ der letzten Oberfläche von der Hauptebene P_2' und beachten wir noch, dass

$$V'q' = R' - r, \qquad V'\omega = d - v', \qquad P_1' F_2 = \triangle - \varphi_2,$$

so wird die frühere Formel

$$\psi = \frac{(R' - r)\, \varphi_2}{(d - v')\,(\triangle - \varphi_2)}. \tag{14}$$

Wird mit D, wie im Artikel 87, der absolute Werth der Entfernung des Objectes von der ersten Hauptebene des Objectives bezeichnet und beachtet, dass die Ebene des Objectes bezüglich des Objectives conjugirt ist zur Ebene $F_2 B$, so gibt die Gleichung (I′) des Artikel 61

$$\frac{1}{\triangle - \varphi_2} = \frac{D - \varphi_1}{\varphi_1 D},$$

und dieser Werth in (14) eingesetzt, führt zu dem Ausdrucke

$$\psi = \frac{R' - r}{d - v'} \, \frac{D - \varphi_1}{D} \, \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Die Gleichung (3) des Artikel 87 gibt

$$(D - \varphi_1) \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = - \frac{\delta'}{m_1},$$

so dass man auch schreiben kann:

$$\psi = - \frac{R' - r}{d - v'} \, \frac{\delta'}{D} \cdot \frac{1}{m_1}. \tag{15}$$

In dieser bemerkenswerthen Gleichung bedeutet, wie bekannt, δ' die Entfernung, in der das Object mit freiem Auge betrachtet würde. Das negative Zeichen rührt daher, dass nach unserer Uebereinkunft die Vergrösserung negativ wird, so oft die durch das Instrument betrachteten Objecte umgekehrt erscheinen. Wir könnten dieselbe Uebereinkunft treffen bezüglich des ψ und dann würde das Zeichen — im rechten Theile zu entfallen haben.

Für ein Fernrohr ist $\delta' = D$ und daher

$$\psi = -\frac{R' - r}{d - v'} \frac{1}{m_1}, \tag{15'}$$

oder auch in Folge der Gleichung (7)

$$\psi = \frac{R' - r}{d - v'} \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \tag{15''}$$

Bei Mikroskopen wird D immer sehr klein und δ' die deutliche Sehweite; das Verhältniss $\frac{\delta'}{D}$ ist daher immer sehr gross. Für ein Mikroskop ist also das Gesichtsfeld viel grösser als für ein Fernrohr mit gleicher Vergrösserung.

Die Formeln (14) und (15) zeigen, dass für ein Instrument mit äusserem Augenpunkte das Gesichtsfeld proportional ist dem $R' - r$. Man darf jedoch nicht glauben, dass durch Vergrösserung der Linsenöffnungen ein beliebig grosses Gesichtsfeld erhalten werden kann. In Wirklichkeit müssen Strahlen, die sich nicht den Bedingungen centraler Strahlen nähern, ausgeschlossen werden. Desshalb sind zwei Bedingungen nothwendig zu erfüllen: 1. der Winkel $q'\omega V'$ oder, was dasselbe ist, das Verhältniss $\frac{R' - r}{d - v'}$ darf nicht zu gross werden; man gibt hierfür als Regel an, dass dieses Verhältniss den Werth $^1/_4$ nicht überschreiten darf; aber selten und das mit Recht, wird in der Praxis diese Grenze erreicht. 2. Die Lichtstrahlen müssen die brechenden Flächen in Punkten treffen, die nicht weit von der Axe entfernt sind; man gibt auch hier als Regel an, dass das Verhältniss von R', der grössten Entfernung von der Axe, die der Schnittpunkt eines Strahles mit der Trennungsfläche haben kann, zum Krümmungsradius derselben, den Werth $^1/_4$ nicht übersteigen soll.

Unter sonst gleichen Umständen wird der durch (14) und (15) gegebene Winkel ψ um so grösser, je kleiner die Entfernung $d-v'$ des Augenpunktes von der letzten Fläche des Instrumentes ist. Zwei Oculare von gleicher Brennweite geben mit demselben Objectiv gleiche Vergrösserungen, aber mit Rücksicht auf das Gesichtsfeld können sie von sehr verschiedener Güte sein: von den beiden wird jenes vorzuziehen sein, für welches $d-v'$ kleiner ist. Nun ist der Augenpunkt ω, als Bild des Scheitels der vorderen Objectivfläche, immer weiter gelegen als der zweite Brennpunkt des Oculares, in einer Entfernung, die bestimmt ist durch die Lage des Objectives und durch die Brennweiten; daher ist von zwei Ocularen, bezüglich der Grösse des Gesichtsfeldes, jenes vorzuziehen, dessen zweiter Brennpunkt näher an der letzten Oberfläche liegt.

Im Artikel 77 wurden zweierlei Systeme von zwei Linsen näher untersucht, die als Oculare Verwendung finden, die beiden in den Figuren 44 und 45 dargestellten. Es genügt der blosse Anblick dieser Figuren, um sofort zu erkennen, dass derartige Oculare, im Hinblick auf das früher Gesagte, vorzuziehen seien einer einzigen Linse von gleicher Brennweite. Die Anordnung, auf welche sich die Figur 45 bezieht, das Campani'sche oder negative Ocular genannt, ist in der genannten Hinsicht, besser als die der Figur 44, die man das Ramsden'sche oder positive Ocular nennt. Wegen dieser Eigenschaft des Campani'schen Oculares hat man dessen erste Linse $P_1 P_1'$, die Gesichtsfeldlinse (Collectivlinse) genannt.

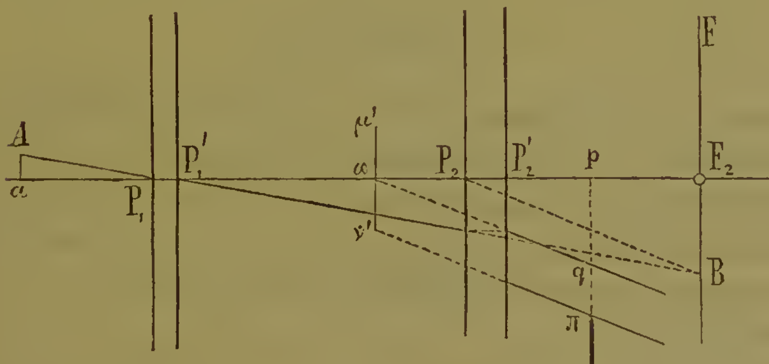
Für $d-v'=0$, wenn also der Augenpunkt mit dem Scheitel der letzten Oberfläche zusammenfällt, geben die Gleichungen (14) und (15) $\psi=\infty$. Wirklich würde es nunmehr genügen, dass die letzte Oberfläche eine Oeffnung besitze, die, wie diess übrigens immer der Fall, grösser ist als der Ocularkreis, damit alle Strahlen, welche durch die übrigen Theile des Instrumentes gegangen sind, austreten können. Aber es würde jetzt das Gesichtsfeld bestimmt sein durch die Oeffnung der vorletzten Linse, und bezüglich dieser wären nun, mit geringfügigen Aenderungen, die Constructionen und Rechnungen auszuführen, die wir soeben für die letzte Linse gezeigt haben.

Bisher wurde vorausgesetzt, dass der Ocularkreis nicht grösser als die Pupille sei; es ist jedoch leicht, das Gesagte auch auf den

entgegengesetzten Fall auszudehnen. Damit nämlich in diesem Falle ein leuchtender Punkt A unter grösster Helligkeit gesehen werde, ist es nothwendig und hinreichend, dass jener mittlere Theil des Strahlenbündels wirklich austrete, der zur Basis die Pupille hat. Alles was früher gesagt wurde, lässt sich somit für den gegenwärtigen Fall wiederholen, nur wird man anzunehmen haben, dass in Fig. 53 $\mu'\nu'$ den Durchmesser und in den Formeln r den Radius der Pupille bedeute.

93. Es bleibt noch der Fall zu betrachten, in dem der Augenpunkt im Innern des Instrumentes liegt und der bei Instrumenten mit divergentem Ocular eintritt. Es ist jetzt nicht mehr möglich die Pupille in die Ebene des Ocularkreises zu stellen. Hieraus folgt, dass von zwei gleichen Bündeln, die beide vollständig aus dem Oculare treten, doch sehr verschiedene Theile davon in die Pupille gelangen, und dass, wenn den Linsen zureichende Oeffnungen gegeben wurden, das Gesichtsfeld bestimmt ist durch die Grösse und Lage der Pupille.

Fig. 54.



Wir nehmen zuerst an, dass der Ocularkreis kleiner sei als die Pupille. Es sei (Fig. 54) F_2F die erste Brennebene des divergenten Oculares, $\mu'\omega\nu'$ der Ocularkreis, p das Centrum der Pupille und $p\pi$ ihr Radius. Wir nehmen dann auch hier an, dass das Instrument für ein auf unendliche Distanz accommodirtes Auge eingestellt sei, somit das vom Objectiv erzeugte Bild in der Ebene F_2F entstehe und die austretenden Bündel, deren Basis $\mu'\nu'$, cylindrisch seien. Wir ziehen $\nu'\pi$; es gibt diese Gerade die Richtung des Bün-

dels an, das unter allen austretenden Bündeln die grösste Neigung hat und noch vollständig in die Pupille gelangt; sie ist zugleich der äusserste Strahl und ωq, parallel zu dieser gezogen, die Axe dieses Bündels, das die Pupillenöffnung im Punkte π berührend, in das Auge tritt. Ziehen wir noch $P_2 B$ parallel zu $\nu'\pi$, so wird der Punkt B, in dem diese Gerade die Brennebene $F_2 F$ schneidet, jener Punkt des vom Objectiv entworfenen Bildes sein, dem das äusserste austretende Bündel entspricht. Wird endlich noch $B P_1'$ und $P_1 A$ zur ersteren Geraden parallel gezogen, so wird der zu B conjugirte Objectpunkt auf der letzteren Geraden liegen. Der Winkel $A P_1 a$ oder der ihm gleiche $F_2 P_1' B$ gibt daher das halbe Gesichtsfeld.

Indem wir mit $2\psi'$ das Gesichtsfeld bezeichnen, haben wir

$$\psi' = \frac{F_2 B}{P_1' F_2},$$

ferner aus den ähnlichen Dreiecken $F_2 P_2 B$, $p\omega q$

$$F_2 B = \frac{pq \times P_2 F_2}{\omega p},$$

daher

$$\psi' = \frac{pq \times P_2 F_2}{P_1' F_2 \times \omega p}.$$

Bezeichnet $\triangle$ die Distanz $P_1' P_2$, d_1 den absoluten Werth $(-d)$ der Distanz $P_2'\omega$, h die Entfernung der Pupille von der Hauptebene P_2' und ϱ den Radius der Pupille; ist ferner φ_2 die negative Brennweite des Oculares und setzen wir daher mit Rücksicht auf die getroffene Uebereinkunft bezüglich der Vorzeichen $P_2 F_2 = -\varphi_2$, so haben wir

$$pq = \varrho - r, \qquad P_2 F_2 = -\varphi_2, \qquad P_1' F_2 = \triangle - \varphi_2$$

und

$$\omega p = d_1 + h.$$

Somit wird, indem wir substituiren:

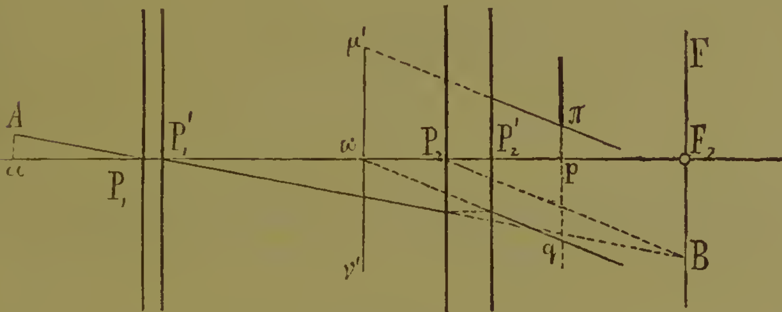
$$\psi' = -\frac{\varrho - r}{\triangle - \varphi_2} \frac{\varphi_2}{d_1 + h}. \tag{16}$$

Wenn wir nunmehr den Ocularkreis grösser als die Pupille voraussetzen, wird $r > \varrho$. Man erkennt aus der Figur 55, dass

das austretende Bündel beginnen wird nicht mehr die ganze Pupille auszufüllen, wenn seine Richtung die der Geraden $\mu'\pi$ ist. Um das Gesichtsfeld zu erhalten, haben wir somit die Gerade $P_2 B$ parallel zu $\mu'\pi$ und hierauf die Gerade zu ziehen, die B mit P_1' verbindet: nennen wir $2\,\psi''$ das Gesichtsfeld so wird

$$\psi'' = F_2 \widehat{P_1'} B.$$

Fig. 55.



Wir haben somit wie oben

$$\psi'' = \frac{F_2 B}{P_1' F_2},$$

und in Folge der ähnlichen Dreiecke $P_2 F_2 B$, $\omega p q$

$$F_2 B = \frac{pq \times P_2 F_2}{\omega p},$$

also

$$\psi'' = \frac{pq \times P_2 F_2}{P_1' F_2 \times \omega p}.$$

Wenn wir die kurz vorher eingeführten Bezeichnungen beibehalten und bemerken, dass

$$pq = r - \varrho,$$

so ergibt sich für ψ'' der Ausdruck:

$$\psi'' = -\frac{r-\varrho}{\triangle - \varphi_2}\;\frac{\varphi_2}{d_1 + h}. \qquad (17)$$

Ist D wieder der absolute Werth der Distanz des Objectes vom ersten Hauptpunkte des Objectives und beachten wir, dass in Folge der Gleichung (I') Artikel 61

$$\frac{1}{\triangle - \varphi_2} = \frac{D - \varphi_1}{\varphi_1 D},$$

und nach Gleichung (3) Artikel 87

$$(D - \varphi_1)\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = -\frac{\delta'}{m_1}$$

ist, so können wir den Formeln (16) und (17) auch folgende Form geben:

$$\psi' = \frac{\varrho - r}{d_1 + h}\,\frac{\delta'}{D}\,\frac{1}{m_1}, \qquad (18)$$

$$\psi'' = \frac{r - \varrho}{d_1 + h}\,\frac{\delta'}{D}\,\frac{1}{m_1}. \qquad (19)$$

Divergente Oculare werden aber gegenwärtig ausschliesslich nur bei Fernrohren verwendet; für diese ist $\delta' = D$ und folglich

$$\psi' = \frac{\varrho - r}{d_1 + h}\cdot\frac{1}{m_1}, \qquad (18')$$

$$\psi'' = \frac{r - \varrho}{d_1 + h}\cdot\frac{1}{m_1}. \qquad (19')$$

Die Werthe von ψ' und ψ'', durch die Gleichungen (16) und (17) oder auch durch (18) und (19) bestimmt, wachsen, wenn h abnimmt: das Gesichtsfeld wird um so grösser, je näher das Auge dem Instrumente rückt:

Für $r = \varrho$ verschwinden ψ' und ψ''; wenn also der Ocularkreis gleich der Pupille ist, wird das Gesichtsfeld Null. Diess bedeutet so viel, als dass in diesem Falle die Helligkeit, mit der die Elemente des Objectes gesehen werden, die ausserhalb der Axe des Instrumentes liegen, kleiner ist als jene, welche das in der Axe gelegene Element besitzt, wie klein auch im Uebrigen die Entfernung der Elemente von der Axe sein mag. Anders ausgedrückt, wenn man sich das Object als eine unendliche zur Axe senkrechte Ebene denkt, gleichförmig beleuchtet in allen ihren Punkten, so wird diese Ebene, durch das Instrument gesehen, heller erscheinen in dem Punkte, der auf der Axe liegt, als in allen übrigen Punkten; die Helligkeit wird allmälig abnehmen mit der Entfernung des Punktes vom Schnitte

der Axe mit der Ebene, ohne dass um diesen Punkt ein Kreis von endlichem Radius existiren würde, innerhalb welchem die Helligkeit gleichförmig wäre.

Wir können uns jetzt eine genaue Vorstellung bilden über den Einfluss, den die Oeffnung des Objectives auf die Helligkeit hat, wenn man durch ein Instrument mit negativem Ocular sieht. Denken wir uns, die ursprünglich sehr kleine Oeffnung des Objectives soll allmälig zunehmen. Die Helligkeit wird anfänglich ebenfalls sehr klein sein; da aber auch r klein ist, so wird es um die Axe herum einen Theil des Objectes geben, der gleichförmig hell erscheint. Wächst die Oeffnung des Objectives, so wächst auch die Helligkeit im Mittelpunkte des gesehenen Objectes, aber der Radius des Kreises von gleichförmiger Helligkeit wird abnehmen. Dieser Radius wird Null, wenn der Ocularkreis gleich der Pupille geworden ist, und die Abnahme der Helligkeit wird somit vom Centrum aus beginnen. Aber gleichzeitig wird sie im Centrum ihren Maximalwerth (91) erreichen; wenn man dann fortfährt das Objectiv zu vergrössern, wird die Helligkeit im mittleren Theile nicht weiter wachsen, jedoch die der umgebenden Theile und es wird wieder der Kreis von gleichförmiger Helligkeit zu Stande kommen, das Gesichtsfeld, das im weiteren Verlaufe fortwährend zunimmt.

Sind die Lagen der verschiedenen Linsen gegeben, so kann man leicht die Oeffnungen derselben bestimmen, die sie haben müssen, damit der äusserste Strahl $\nu'\pi$ oder $\mu'\pi$ (Fig. 54 und 55) noch aus dem Ocular treten kann. In der Praxis gibt man übrigens oft den divergenten Ocularen eine weit grössere Oeffnung als die so bestimmte. Indem man das Auge längs der letzten Linsenfläche verschiebt, kann man alsdann noch Objecte, die ausserhalb des theoretischen Gesichtsfeldes liegen, unter der Maximalhelligkeit sehen; man kann nämlich auf diese Weise das Gesichtsfeld selbst verschieben.

94. Das Gesichtsfeld, wie wir es definirt haben, ist nicht jener ganze Raumtheil, den man durch das Instrument sehen kann, sondern nur jener Theil, den man unter gleichförmiger Helligkeit erblickt. Wenn man alles Licht, das durch das Objectiv in das Instrument gelangt, auch aus dem Oculare treten lässt, so wird man um den mittleren, gleichförmig hellen Theil des Objectes, andere

Theile sehen von allmälig abnehmender Helligkeit; die Helligkeit wird von ihrem grössten Werthe, den sie im Gesichtsfelde hat, continuirlich bis zu Null abnehmen. Wenn z. B. das beobachtete Object eine unendliche Ebene aA (Fig. 51 und 52) ist und die Linsen so gewählt wurden, dass AP_1a die Hälfte des Gesichtsfeldes wird, so sieht man unter gleichförmiger Helligkeit den Theil der Ebene, der begrenzt wird durch einen Kreis vom Radius aA, mit dem Centrum in a, und unter abnehmender Helligkeit den ausserhalb dieses Kreises gelegenen Theil.

Bei den Instrumenten, in denen ein reelles Bild zu Stande kommt, wird dieser Theil mit abnehmender Helligkeit ausgeschlossen, indem man in die Ebene des Bildes einen undurchsichtigen, geschwärzten Schirm stellt, der in der Mitte mit einer kreisförmigen Oeffnung, gleich gross wie das Bild des früher genannten Kreises aA, versehen ist. Ein Punkt A_1, der in der Ebene aA ausserhalb des Kreises aA (Fig. 51) liegt, würde zum Bilde einen Punkt B_1 haben, der weiter von der Axe entfernt ist als der Punkt B, also ausserhalb der Oeffnung, auf dem undurchsichtigen Theile des Schirmes sich befindet; auf diese Weise werden alle Strahlen, die das Instrument vom Punkte A_1 empfängt, da sie durch B_1 gehen, abgehalten. Betrachtet man mittelst des Instrumentes die Ebene aA, so erblickt man den Kreis aA, gleichförmig hell auf einen dunkeln Grund projicirt, wie in einen schwarzen Rahmen mit scharfem Rande eingeschlossen. Der durchlöcherte Schirm, mittelst dem dieser Effect erreicht wird, heisst Diaphragma[1]).

---

1) In den Schriften über Dioptrik pflegt man das Gesichtsfeld anders zu definiren und zu bestimmen als von uns geschehen ist. Man pflegt stillschweigend vorauszusetzen, dass das Objectiv durch eine unendlich dünne Linse gebildet werde oder dass wenigstens der Scheitel seiner Vorderfläche mit dem ersten Hauptpunkte zusammenfällt, nennt Hauptstrahlen jene, die durch den Scheitel des Objectives hindurchgehen und definirt das Gesichtsfeld als das Doppelte des Winkels, den von den Hauptstrahlen, die aus dem Instrumente treten können, der am Meisten geneigte mit der Axe bildet. Ohne diese Definition zu verlassen und doch von der nicht immer zulässigen Voraussetzung frei zu sein, dass der Scheitel der Vorderfläche des Objectives mit dem ersten Hauptpunkte zusammenfalle, hätten wir sagen müssen: das Gesichtsfeld ist das Doppelte des grössten Werthes, den man dem

Um durch eine sehr einfache Construction den Durchmesser der Oeffnung im Diaphragma zu bestimmen, kann man von der Be-

Winkel $AP_1 a$ (Fig. 51) geben kann, ohne dass der Hauptstrahl $AFq_2'\omega$ aufhört aus dem Instrumente zu treten.

Wird diese Definition angenommen, so bestimmen sich die Oeffnungen, die den einzelnen Linsen zu geben sind, damit das Gesichtsfeld eine gegebene Grösse habe, gleich dem Doppelten des Winkels $AP_1 a$, sehr einfach, indem man auf graphischem Wege oder durch Rechnung die Bahn des Hauptstrahles $AP_1 q' \omega$ (Fig. 53) ermittelt und nachsieht, in welchen Punkten dieselbe die aufeinanderfolgenden Linsen schneidet. Und umgekehrt, wenn die Oeffnung einer der Ocularlinsen, z. B. die Oeffnung $F'q' = R'$ der letzten, gegeben ist, so würde man die Oeffnungen, welche die anderen Linsen haben müssen und das Gesichtsfeld bestimmen, indem man $q'\omega$ zieht und durch Construction oder Rechnung die Bahn des Hauptstrahles sucht, der nach dieser Geraden austritt.

Es ist klar, dass, wenn man dem Diaphragma eine Oeffnung $F_2 B$ (Fig. 53) geben würde, die alle Punkte des Objectes innerhalb des so bestimmten Gesichtsfeldes zu sehen gestattet, von den Punkten, die gleichzeitig durch das Instrument gesehen werden können, die am weitesten von der Axe entfernten, die Punkte, deren conjugirte, wie B, am Rande des Diaphragma liegen, eine Helligkeit zeigen würden, die nahezu halb so gross ist als die grösste Helligkeit im Centrum; denn von dem Bündel $n'\nu' m' \mu'$, das irgend einem dieser Punkte, B, entspricht, könnte nur etwa die Hälfte aus der letzten Fläche austreten, weil diese, wie jetzt vorausgesetzt werden muss, durch einen Kreis vom Radius $F'q'$ begrenzt ist. Nun suchen aber die Verfertiger, wenigstens bei Instrumenten mit reellen Bildern, das Diaphragma so anzupassen, dass der durch das Instrument sichtbare Theil des Raumes gleichförmig hell erscheint; unsere Definition des Gesichtsfeldes kann daher für ein gut construirtes Instrument mit reellem Bilde durch die folgende ersetzt werden: Gesichtsfeld nennt man den Winkel an der Spitze jenes Kegels, welcher den auf einmal durch das Instrument übersehbaren Raumtheil begrenzt. Wenn man hingegen die gewöhnliche Art, das Gesichtsfeld zu definiren, beibehält, so entspricht diese Definition, die man dennoch in vielen Büchern gibt, nicht dem, was schliesslich durch Rechnung oder Construction wirklich bestimmt wird.

Nach der gewöhnlichen Definition hat die Oeffnung des Objectives keinen Einfluss auf das Gesichtsfeld, das ja nur von der Anordnung und den Oeffnungen der Ocularlinsen abhängt; nach unserer Definition hingegen zeigt sich ein solcher Einfluss; in den Gleichungen (14), (15), (15′), (15″), (16), (17), (18), (19), (18′), (19′) erscheint der Radius r des Ocularkreises, der abhängig ist von der Oeffnung des Objectives.

Es muss jedoch bemerkt werden, dass bei Instrumenten mit äusserem Ocularkreis und mit bedeutender Vergrösserung, r gewöhnlich sehr klein ist gegen R' und daher der Einfluss des Objectivdurchmessers wenig bemerkbar wird.

In allen Fällen würde unsere Definition mit der gewöhnlichen übereinstimmen, wenn man den Durchmesser des Objectives unendlich klein sein liesse.

merkung ausgehen, dass der Punkt B auf $m_1' m_2$ liegt. Ist das Instrument so beschaffen, dass die Punkte m_1' und m_2 nicht weit von den Conturen der bezüglichen Linsen abstehen, so kann man sagen: die Oeffnung des Diaphragma ist nahezu gleich dem Schnitte der Brennebene $F_2 B$ mit der inneren Kegelfläche, die durch den Umfang des Objectives und den der ersten Ocularlinse hindurchgeht.

Wenn das Instrument bestimmt ist einen Theil eines Messapparates zu bilden, so muss es von der Art jener Instrumente sein, in denen ein reelles Bild zu Stande kommt. Dann bringt man an dem Diaphragma ein Netz an, das, je nach dem Gebrauche, zu dem das Instrument dient, sehr verschieden eingerichtet sein kann, in den meisten Fällen jedoch einfach aus zwei Spinnfäden hergestellt ist, die über die Oeffnung des Diaphragmas nach zwei zueinander senkrechten Durchmessern ausgespannt werden. Ein an das Ocular gehaltenes Auge sieht gleichzeitig mit dem Bilde des betrachteten Objectes die beiden Fäden und betrachtet das Zusammenfallen ihres Kreuzungspunktes o (Fig. 53) mit dem Bilde jenes Punktes, in dem das Object, von dem aus P_1 zur Geraden $o P_1'$ parallelen Strahle getroffen wird. Die unendliche Gerade $o P_1'$, welche im Allgemeinen nicht genau mit der Centralaxe zusammenfällt, die aber unveränderlich ist, insolange die Lage des Fadenkreuzes gegen das Objectiv nicht geändert wird, heisst die optische Axe des Instrumentes.

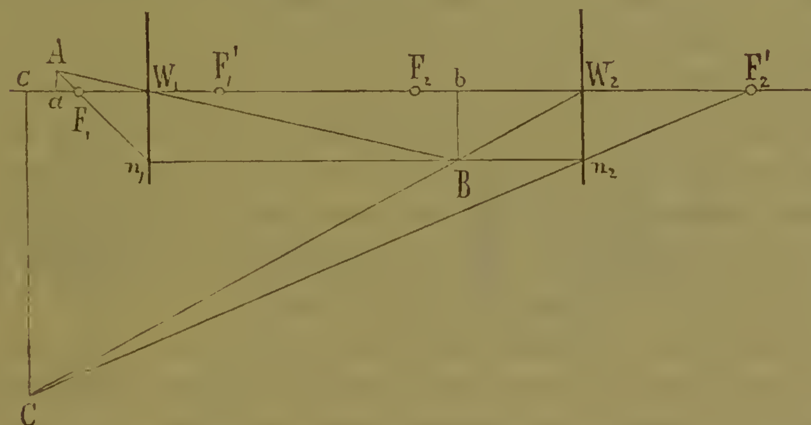
In den Instrumenten mit divergentem Oculare, in denen kein reelles Bild auftritt, ist es unmöglich ein Fadenkreuz anzubringen, aber man kann immer durch Diaphragmen zwischen Objectiv und Ocular die Strahlen abhalten, die von Punkten, ausserhalb des Gesichtsfeldes gelegen, herkommen. Oft ist das Gesichtsfeld sehr klein, alsdann wird durch die Diaphragmen der Unterschied zwischen der Helligkeit des centralen und des peripherischen Theiles des betrachteten Objectes nicht ganz beseitigt, sondern nur vermindert.

Dann wären in der That die Punkte m' und n' unendlich nahe an q' gelegen. Unsere oben angegebenen Formeln würden mit jenen zusammenfallen, zu denen man nach der gewöhnlichen Art das Gesichtsfeld zu bestimmen gelangt, sobald wir $r = o$ setzen.

§ 4. *Das Mikroskop.*

95. Ein Mikroskop besteht aus einem Objective von sehr kleiner Brennweite und einem convergenten Oculare, die so gegeneinander gestellt sind, dass die Entfernung der zweiten Hauptebene des ersteren von der ersten Hauptebene des letzteren bedeutend grösser ist als die Summe der beiden Brennweiten. Denkt man sich dem Objetive und dem Oculare unendlich dünne aequivalente Linsen (73) substituirt, so lässt sich das Instrument durch eine Figur ähnlich der Fig. 56 darstellen; in dieser sind W_1 und W_2 die beiden ideellen Linsen, F_1 und F_1' sind die Brennpunkte der ersten, F_2 und F_2' die der zweiten Linse. Vorausgesetzt ist, wie gewöhnlich, dass sich das Licht von der Linken zur Rechten fortpflanze.

Fig. 56.



Um mit Hilfe des Instrumentes ein Object zu beobachten, wird letzteres in aA vor dem Objective und ausserhalb der Strecke W_1F_1 aufgestellt, so dass hievon das Objectiv ein reelles und verkehrtes Bild bB entwirft; während dann das Auge vor dem Oculare sich befindet, variirt man die Distanz aF_1 und mit dieser die Lage des Bildes Bb solange, bis die Ebene cC, die bezüglich des Oculares conjugirt ist zur Ebene Bb, in der Entfernung sich befindet, auf welche das Auge accommodirt ist. Das Ocular wirkt, bezüglich des Bildes bB, wie ein einfaches Mikroskop und lässt es vergrössert erscheinen; wenn man andererseits die Distanz W_1b vielmal grösser macht als W_1a, so wird man bewirken, dass bB bedeutend grösser

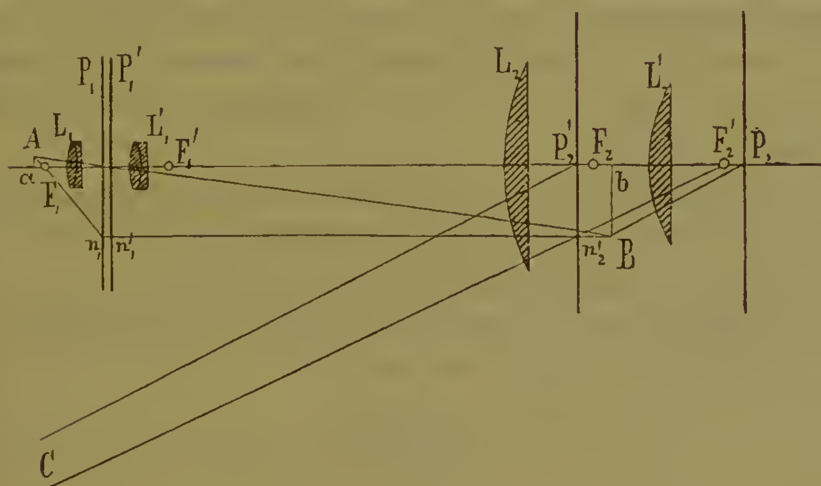
ist als das Object aA; desshalb kann ein zusammengesetztes Instrument Vergrösserungen geben, die mittelst einfachen Mikroskopes nicht erreicht werden könnten, ohne dass sehr bedeutende Aberrationen auftreten würden.

Die Vergrösserung ist umso grösser, je grösser die Entfernung W_1b, je grösser die Entfernung des Oculares vom Objectiv, oder die Länge des Instrumentes ist. Dennoch würde man mit dieser Länge nicht über eine gewisse Grenze gehen können und der Grund hiefür ist leicht einzusehen. Stellt man sich vor, das Object nähere sich aus grösserer Entfernung allmälig immer mehr dem vorderen Brennpunkte F_1 des Objectives, so wird sein Bild sich immer mehr vom zweiten Brennpunkte F_1' entfernen, im Anfange langsam, zuletzt immer schneller; befindet sich das Object sehr nahe dem Brennpunkte F_1, so werden äussert kleine Verschiebungen desselben sehr grosse Verschiebungen des Bildes hervorbringen. Es folgt hieraus, dass von einem Objecte, dem ja immer eine von Null verschiedene Dicke zukommt, wenn man es sehr nahe an den Brennpunkt stellt, um sein Bild in sehr grosser Entfernung zu erhalten, nur die in einem ebenen, zur Axe senkrechten Querschnitt gelegenen Punkte gesehen werden könnten, bei bestimmter Stellung des Instrumentes. Es ist daher vorzuziehen, die Länge desselben zu beschränken und die Brennweite des Objectives klein zu wählen.

Das Objectiv ist immer ein System von zwei oder drei kleinen achromatischen Linsen. Eine jede von diesen Linsen ist ein System von zweien, einer convergenten von Crown- und einer divergenten aus Flint-Glas, die sich berühren und wie das im Artikel 77 d) (Fig. 47) untersuchte System wirken. Die zwei oder drei achromatischen Linsen werden dann nahe aneinander so aufgestellt, dass für eine von ihnen und dem Systeme der anderen die Bedingungen erfüllt sind, die wir im Artikel 77 a) betrachtet haben. Auf diese Weise wird das System aequivalent einer convergenten Linse von sehr kleiner Brennweite. In der Praxis werden die Entfernungen der Linsen voneinander versuchsweise bestimmt. Das Ocular ist fast immer ein Campani'sches oder negatives, und besteht aus zwei convergenten Linsen, welche wie die im Artikel 77 b) untersuchten angeordnet sind. Der Zweck, zu welchem im

Mikroskop sowie bei den meisten anderen Instrumenten Oculare und Objective angewendet werden, die aus mehreren Linsen bestehen, ist der, scharfe Bilder zu erhalten, auch wenn diese von nicht centralen und nicht homogenen Strahlen herrühren, also die Aberrationen möglichst klein zu machen; die Bedingungen jedoch, die zu diesem Zwecke zu erfüllen sind, können hier nicht näher untersucht werden. Gleichwohl vermögen wir einzusehen, wie der Gebrauch solcher zusammengesetzter Systeme es gestattet, ohne die Fehler des Bildes zu vergrössern, grösseres Gesichtsfeld und grössere Helligkeit zu erreichen, als durch einfache Linsen möglich wäre: wir brauchen uns nur bezüglich des Gesichtsfeldes an die Betrachtungen zu erinnern, die im Artikel 92 über zusammengesetzte Oculare angestellt wurden, und bezüglich der Helligkeit dieselben Betrachtungen auf die Objective auszudehnen.

Fig. 57.



In Fig. 57 sind die Lagen der Linsen angedeutet, sowie die Hauptebenen und Brennpunkte des Objectives und des zusammengesetzten Oculares eingezeichnet. Das Objectiv wurde der Einfachheit wegen blos aus zwei achromatischen Linsen L_1 und L_1' bestehend und die Hauptebenen und Brennpunkte dieses Systemes, die man vorerst durch Rechnung oder Construction (77 a) wird zu bestimmen haben, wurden in P_1, P_1', F_1, F_1' gelegen angenommen. Das Ocular ist aus zwei convergenten Linsen L_2, L_2' zusammenge-

setzt und als seine Fundamentalpunkte, nach der im Artikel 77 b) angegebenen Weise bestimmt, sind die Punkte P_2, P_2', F_2, F_2' angenommen. Die Figur zeigt die Constructionen, durch welche man den zu einem Objectpunkte A conjugirten Punkt C findet. Durch A wurde AP_1 und durch P_1' hierzu parallel die Gerade $P_1'B$ gezogen; sodann wurde die Gerade AF_1n_1 verzeichnet und durch n_1 die Gerade $n_1n_1'n_2'B$ parallel der Axe; der Schnitt B dieser Geraden mit $P_1'B$ ist der bezüglich des Objectives zu A conjugirte Punkt, und Bb ist das Bild von Aa. Durch B ist weiter BP_2 gezogen und durch P_2' die Gerade $P_2'C$ parallel zu dieser, ferner ist Bn_2' parallel der Axe und durch n_2' die Gerade $F_2'n_2'C$ gelegt; diese schneidet $P_2'C$ im Punkte C, in dem zu B bezüglich des Oculares conjugirtem Punkte. Wenn b zur Rechten von F_2 liegt, ist der Punkt C zur Linken gelegen, und das Instrument ist für ein auf endliche Distanz accommodirtes Auge eingestellt; fällt b mit F_2 zusammen, so rückt C in's Unendliche und das Instrument ist dann so gestellt, dass es für ein auf unendliche Distanz accommodirtes Auge passt; ist endlich b links von F_2 und der Punkt C also rechts davon gelegen, so kann derselbe nur von einem hypermetropen Auge gesehen werden.

96. Man kann sich die Frage stellen, welche Lage die Fundamentalpunkte des ganzen Instrumentes haben und wie die ihm aequivalente unendlich dünne Linse beschaffen sei.

Zur Bestimmung der Fundamentalpunkte dienen die Gleichungen (6″), (5″), (7″) des Artikels 75, nämlich

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle}, \tag{6''}$$

$$P_1 P = \frac{\varphi_1 \triangle}{\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle}, \tag{5''}$$

$$P_2' P' = - \frac{\varphi_2 \triangle}{\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle}. \tag{7''}$$

In diesen Formeln bedeutet φ die Brennweite des ganzen Systemes φ_1 und φ_2 sind die Brennweiten der beiden Systeme aus welchen ersteres zusammengesetzt ist, unter $\triangle$ wird die Entfernung der

zweiten Hauptebene des ersten, von der ersten Hauptebene des zweiten dieser Systeme verstanden und P_1P, $P_2'P'$ sind die Distanzen des ersten und zweiten Hauptpunktes des zusammengesezten Systemes beziehungsweise vom ersten Hauptpunkte des ersten und vom zweiten Hauptpunkte des zweiten seiner Partialsysteme; für alle diese Distanzen gilt die gewöhnliche Regel bezüglich der Vorzeichen. Im gegenwärtigen Falle sind nun φ_1, φ_2 und $\triangle$ sämmtlich positiv und folglich sind es auch die Producte $\varphi_1\varphi_2$, $\varphi_1\triangle$, $\varphi_2\triangle$; da aber $\varphi_1 + \varphi_2$ kleiner ist als $\triangle$, so wird der den drei Ausdrücken (6″), (5″), (7″) gemeinsame Nenner negativ, somit ist;

1. φ negativ: das System ist ein divergentes;

2. P_1P negativ: der erste Hauptpunkt befindet sich zur Linken von P_1 und, da $\frac{\triangle}{\triangle - \varphi_1 - \varphi_2}$ grösser als die Einheit ist, so wird der erste Hauptpunkt ausserhalb des Instrumentes und weiter entfernt als der erste Brennpunkt F_1 des Objectives liegen;

3. $P_2'P'$ positiv und grösser als φ_2: der zweite Hauptpunkt liegt ebenfalls ausserhalb des Instrumentes und weiter entfernt als der zweite Brennpunkt des Oculares.

Zu den gleichen Schlüssen führt die graphische Construction, wie sie im Artikel 76 angegeben ist. Um die Figur nicht unnöthiger Weise zu compliziren, denken wir uns dem Objectiv und dem Oculare die aequivalenten unendlich dünnen Linsen substituirt; W_1 und W_2 seien die Scheitel F_1, F_1' und F_2, F_2' die Brennpunkte derselben (Fig. 58). Um die Fundamentalpunkte des Systemes zu bestimmen, ziehen wir in beliebiger Entfernung und parallel zur Axe eine Gerade LL' und betrachten sie zuerst als eine Einfalls- sodann als eine Austritts- Gerade. Unter der ersten Voraussetzung entspricht ihr in dem Raume zwischen den beiden Linsen die Gerade $m_1F_1'n_2$, unter der zweiten Voraussetzung die Gerade $m_2F_2n_1$; diese beiden Geraden schneiden sich in o. Wir wissen aber, dass der Punkt o bezüglich des Objectives conjugirt ist dem Punkte, in welchem die Gerade LL' die erste Hauptebene des zusammengesetzten Systemes schneidet und bezüglich des Oculares dem Schnittpunkte der Geraden LL' mit der zweiten Hauptebene. Es müssen also diese Schnittpunkte von LL' mit den beiden Hauptebenen auf

den Geraden oW_1 und oW_2 liegen, d. h. sie sind die Punkte p und p', in denen diese beiden Geraden die Gerade LL' schneiden. Die Fusspunkte P und P' der aus den Punkten p und p' auf die Axe gefällten Perpendikel sind die beiden Hauptpunkte. Die Einfallsgerade, die der Austrittsgeraden LL' entspricht, muss durch n_1 und durch p, dem zu p' conjugirten Punkte gehen, ist also pn_1 und in ähnlicher Weise ergibt sich n_2p' als die Austrittsgerade, die zur Eintrittsgeraden LL' gehört. Die Punkte F und F', in denen diese beiden Geraden die Axe schneiden, sind die Brennpunkte des Systemes.

Fig. 58.

Die dem Mikroskope äquivalente unendlich dünne Linse (73) hat ihren Scheitel in P und ihren ersten Brennpunkt in F, den zweiten in F'', in einer Entfernung von P, die der Grösse und dem Vorzeichen nach gleich $P'F'$ ist. Sie ist eine Linse, welche Strahlen die nach F convergiren parallel machen würde, zur Axe parallel einfallende Strahlen aber in ein Bündel verwandelt, die vom Punkte F'' aus divergiren; sie ist eine divergente Linse. Ihre Wirkungsweise ist jene, die wir im Artikel 74, 2, b) untersucht haben, ist die eines divergenten Oculars. Wenn ein System einfallender Strahlen, die von einem anderen Systeme kommen, ein reelles Bild aA erzeugen würden an einer Stelle, die über den ersten Brennpunkt hinaus liegt, so erzeugt die Linse ein virtuelles verkehrtes Bild bB, das um so weiter entfernt und um so grösser ist, je näher der Punkt a dem Brennpunkte F liegt.

Man sieht, dass eine Linse unter den Bedingungen der dem Mikroskope aequivalenten Linse dazu dienen würde, Bilder, die hinter derselben zu Stande kämen, vergrössert zu zeigen, aber sie könnte nicht dazu dienen reelle Objecte zu beobachten, wie jene es sind, zu deren Beobachtung das zusammengesetzte Mikroskop bestimmt ist. Wir haben in diesem Beispiele eine Bestätigung dessen, was wir über die Unterscheidung der dioptrischen Instrumente in einfache und zusammengesetzte gesagt haben: einfache Instrumente können wie zusammengesetzte aus mehreren Linsen bestehen, aber ihre Wirkungen kann man auch durch eine einzige Linse erhalten; für die zusammengesetzten Instrumente hingegen ist diess unmöglich.

97. Die Vergrösserung ist durch die Formeln (2′) und (3) des Artikels 87 gegeben. Wenn D die Entfernung des Objectes von der ersten Hauptebene des Objectives, d die Entfernung des Augenpunktes von der zweiten Hauptebene des Oculares, und δ' die Distanz des Nahepunktes vom Auge bedeutet, so ist die Vergrösserung:

$$m = -\frac{\varphi_1}{D-\varphi_1}\,\frac{\delta'}{\varphi_2}\left(1+\frac{\varphi_2-d}{\delta}\right), \qquad (2')$$

wenn das Instrument für ein auf die Distanz δ accommodirtes Auge eingestellt ist, sie ist hingegen

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{D-\varphi_1}\,\frac{\delta'}{\varphi_2}, \qquad (3)$$

wenn das Instrument einem auf unendliche Entfernung accommodirtem Auge angepasst wird.

Da derjenige, welcher durch ein Mikroskop sieht, weiss, dass das Object nahe ist und sein Auge unbewusst auf den Nahepunkt accommodirt, so wird der wahrscheinliche Werth der Vergrösserung jener sein, den man aus (2′) für $\delta = \delta'$ erhält, d. i.

$$m = -\frac{\varphi_1}{D-\varphi_1}\,\frac{\delta'}{\varphi_2}\left(1+\frac{\varphi_2-d}{\delta'}\right).$$

Da jedoch für zusammengesetzte Mikroskope $\varphi_2 - d$ immer sehr klein ist, kann man sich in allen Fällen des einfacheren Ausdruckes

(3) bedienen und wird daraus Zahlen erhalten, die der Wirklichkeit sehr nahe kommen.

Die Gleichung (3) verwandelt sich in eine für die Anwendung viel bequemere, wenn man darin die Distanz D eliminirt, die man direct nicht messen kann. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass, wenn das Instrument, wie es die Gleichung (3) voraussetzt, für ein auf unendliche Entfernung accommodirtes Auge eingestellt ist, das vom Objectiv entworfene Bild in der Brennebene des Oculares liegt, sich also in der Entfernung $\triangle - \varphi_2$ von der zweiten Hauptebene des Objectives befindet. Desshalb ist, nach Gleichung (I′) Artikel 61,

$$\frac{1}{\triangle - \varphi_2} + \frac{1}{D} = \frac{1}{\varphi_1},$$

und weiter

$$\frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} = \frac{\triangle - \varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1}.$$

Durch Substitution dieses Werthes erhält man aus (3)

$$m_1 = -\frac{\triangle - \varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 \varphi_2}\,\delta'. \tag{4}$$

Zu dieser Gleichung gelangt man direct durch Betrachtung der unendlich dünnen Linse, die dem Mikroskope aequivalent ist. In

Fig. 59.

der That, wenn das Auge auf unendliche Entfernung accommodirt ist, so muss sich das Object in der ersten Brennebene F der fingirten Linse Pp (Fig. 59) befinden. Dann wird einem Bündel stu,

dessen Strahlen durch A gehen, ein austretendes cylindrisches Bündel $s'l'u'$ entsprechen, das mit der Axe den Winkel APa oder $\frac{aA}{\varphi}$ bildet. Dieses ist der Gesichtswinkel, unter welchem das Object durch die Linse hindurch gesehen wird; mit blossem Auge aber würde man dasselbe in der Entfernung δ' betrachten und es erschiene dann unter dem Sehwinkel $\frac{aA}{\delta'}$, demnach ist die Vergrösserung

$$m_1 = \frac{aA}{\varphi} : \frac{aA}{\delta'} = \frac{\delta'}{\varphi} .$$

Setzt man hierin für φ seinen Werth (6″), so verwandelt sich dieser Ausdruck für m_1 in den unter (4) gegebenen.

98. Die Lage und Grösse des Ocularkreises kann man nach dem allgemeinen Verfahren finden, das in den Artikeln 88 und 89 angegeben wurde, bequemer jedoch mit Hilfe der Fundamentalpunkte des ganzen Systemes. Wenn nämlich durch die Formeln (6″) (5″) (7″) oder auch durch Construction die Punkte P, P' und die Brennweite φ bestimmt worden sind, so wird auch die Entfernung des Scheitels der ersten Objectivfläche vom Punkte P bestimmt sein und kann als gegeben angesehen werden, und in ähnlicher Weise wird auch der Augenpunkt bestimmt sein, wenn man dessen Entfernung vom Punkte P' kennt; diese beiden Entfernungen nennen wir x und x'. Da der Scheitel der ersten Fläche und der Augenpunkt conjugirte Punkte sind, so besteht zwischen den beiden Entfernungen x und x' die Beziehung (I′) Artikel 61:

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\varphi} ,$$

durch welche x' bestimmt wird. Fügen wir zu x' die Entfernung $P_2'P'$ des zweiten Hauptpunktes vom zweiten Hauptpunkte des Oculares hinzu, so erhalten wir die Entfernung des Augenpunktes vom zweiten Hauptpunkte des Oculares, die wir in den Artikeln 88 und 89 mit d bezeichnet haben. Da ferner der Ocularkreis und die Vorderfläche des Objectives conjugirte Bilder sind, so bestehen zwischen ihren Radien R und r dieselben Beziehungen, wie zwischen

y und y' nach den Gleichungen (II'') und (II') (61); wir haben daher:

$$\frac{R}{r} = \frac{x}{x'},$$

oder auch

$$\frac{R}{r} = 1 + \frac{x}{\varphi}.$$

Setzen wir für einen Augenblick voraus, der Scheitel der ersten Fläche des Objectives falle mit dem ersten Hauptpunkte desselben zusammen, so wird unter dieser Annahme x die Entfernung der ersten Hauptebene des Objectives vom ersten Hauptpunkte des ganzen Instrumentes bedeuten und den Werth $-P_1P$ haben, oder auch in Folge von (5'')

$$x = \frac{\varphi_1 \triangle}{\triangle - \varphi_1 - \varphi_2}$$

sein. Berücksichtigen wir ferner (6''):

$$\frac{x}{\varphi} = -\frac{\triangle}{\varphi_2},$$

so gibt die Substitution in den zweiten Ausdruck für $\frac{R}{r}$:

$$\frac{R}{r} = -\left(\frac{\triangle}{\varphi_2} - 1\right) = -\frac{\triangle - \varphi_2}{\varphi_2}. \qquad (9'')$$

Wir erhalten so die angenäherte Formel (9'') wieder, die wir auf anderem Wege in dem vorhergegangenen Paragraph (89) gefunden haben.

99. Hat man die Werthe von m, d und r gefunden, so geben die Gleichungen (11) und (15) der Artikel 91 und 92 die Helligkeit und das Gesichtsfeld.

Die Helligkeit anlangend, so gibt der letzte Ausdruck (9'') des Werthes von $\frac{R}{r}$ Veranlassung zu einer wichtigen Bemerkung. Der Zähler des Bruches $\frac{\triangle - \varphi_2}{\varphi_2}$ ist die Entfernung des Brennpunktes des Oculares von der zweiten Hauptebene des Objectives, die Distanz $P_1'F_2$ (Fig. 57); der Nenner hingegen ist die Brennweite des Ocu-

lares, die Distanz F_2P_2 (Fig. 57); die erstere ist immer viel grösser als die zweite. Daher ist unter den gegenwärtigen Voraussetzungen der Radius des Ocularkreises sehr klein gegen den Radius der Vorderfläche der ersten Objectivlinse. Wäre z. B. $\triangle$ gleich 21 Centimeter und φ_2 gleich 1 Centimeter, so würde sein

$$\frac{R}{r} = -20,$$

der Radius des Ocularkreises wäre kaum der zwanzigste Theil des Radius der vordersten Objectivfläche.

In Wirklichkeit fällt der Scheitel der ersten Fläche nicht mit P_1 zusammen und der absolute Werth von $\frac{x}{\varphi}$ ist kleiner als der soeben berechnete; jedoch genügt die gegenwärtige Rechnung, um zu zeigen, dass in den meisten Fällen der Ocularkreis bei Mikroskopen bedeutend kleiner sein wird als die erste Oberfläche des Objectives.

Nun ist aber bei den Mikroskopen die Objectivöffnung beschränkt durch die Nothwendigkeit, die nicht centralen Strahlen auszuschliessen, für welche die Fundamentaleigenschaften, auf die sich die Construction des Apparates stützt, keine Geltung haben würden. Wenn man als Grenze den aus

$$4\,R = a$$

folgenden Werth von R annimmt, so wird das Objectiv der Mikroskope fast immer einen Radius haben, kleiner als der der Pupille. Somit wird der Ocularkreis für gewöhnlich sehr klein sein gegen die Pupille.

Die durch Gleichung (11) Art. 91 gegebene Grösse der Helligkeit.

$$C = \frac{\omega}{p}$$

wird also im Allgemeinen sehr klein. Wenn wir in dem oben gewählten Beispiele auch voraussetzen, dass die erste Objectivlinse gleichen Durchmesser mit der Pupille habe, was in Wirklichkeit nicht der Fall sein wird, so würden wir finden

$$C = \frac{1}{400}\,.$$

100. Diese Betrachtungen zeigen, dass für den Gebrauch des Mikroskopes gute Beleuchtung des Objectes eine der wesentlichsten Bedingungen ist; die übrigen Bedingungen reduciren sich darauf, dass das dioptrische System auf bequeme Weise in die gehörige Entfernung vom Objecte gebracht und dem Auge des Beobachters angepasst werden könne, so wie, dass der Apparat ausgerüstet sei mit abnehmbaren, für die verschiedenen Anwendungen, zu denen er bestimmt ist, nothwendigen Bestandtheilen und den Hilfsmitteln zu Messungen. Die Anordnungen, die hierfür von den Constructeuren gewählt werden, sind zwar verschiedene, wenn man jedoch nur auf das Wesentliche derselben Rücksicht nimmt, so kommen sie alle auf die folgende zurück.

Das Instrument besteht im Wesentlichen aus zwei Theilen: dem dioptrischen Systeme und dem Objectträger. Objectiv und Ocular des dioptrischen Systemes sind an den beiden Enden eines Rohres angebracht; der Objectträger ist ein Tischchen mit einer Platte, auf welches die Objecte, entweder zwischen zwei Gläsern eingeschlossen oder einfach auf eine Glasplatte geklebt, mittelst zweier federnder Leistchen befestigt werden. Die Axe der Röhre, welche die Linsen enthält, ist zugleich die Axe des Instrumentes und liegt, so weit diess praktisch zu erreichen ist, der Central-Axe des dioptrischen Systemes möglichst nahe; sie steht senkrecht zur oberen Fläche des Objectträgers. Die Axe ist meist vertical gestellt, aber in vollständiger eingerichteten Instrumenten kann sie je nach Bequemlichkeit des Beobachters beliebig geneigt werden. Bei einigen Instrumenten besteht das Rohr aus zwei Theilen, die unter rechtem Winkel aneinandergefügt sind und enthält an der Stelle des Kniees ein total reflectirendes Prisma, das nach der Richtung des zweiten Röhrentheiles die Strahlen reflectirt, die parallel zur Axe des ersten Theiles ankommen. In diesem Falle ist der Theil des Rohres, welcher das Objectiv enthält, vertical gestellt. und die Platte des Objectträgers ist in horizontaler Lage befestigt.

Der Objectträger steht fest und um die Entfernung des Objectes vom Objective reguliren zu können, wird das dioptrische System verschoben. Zu diesem Zwecke ist das Rohr, welches die Linsen enthält, mit einer Führung versehen und kann mittelst

Zahnstange und Triebrades gehoben oder gesenkt werden. Bei manchen Instrumenten ist ausser diesem Triebe, mit welchem man dem ganzen dioptrischen Systeme eine rasche Bewegung ertheilen kann, noch eine Schraube von sehr kleiner Ganghöhe angebracht, die das Ocular sehr langsam zu verschieben gestattet, bis das Bild deutlich erscheint. Auch der Objectträger ist bei feinen Instrumenten mit Schrauben versehen; eine von diesen dient dazu, die Platte des Objectträgers in ihrer Ebene in einem Sinne, die andere, sie in einer hierauf senkrechten Richtung zu verschieben. Hiedurch kann das Object in das Gesichtsfeld des dioptrischen Systemes gebracht werden.

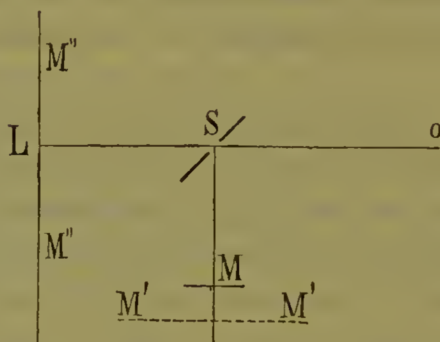
Es ist nöthig das Object sehr kräftig zu beleuchten. Um diess zu erreichen, enthält die Platte des Objectträgers in ihrem mittleren Theile, dort wo sie von der Axe des Instrumentes getroffen wird, eine kreisrunde Oeffnung; ein Concav-Spiegel, nach allen Richtungen beweglich eingerichtet, befindet sich unterhalb derselben und kann so gestellt werden, dass er die von den Wolken oder von einer Lampe oder von einer stark beleuchteten matten Glastafel kommenden Strahlen empfängt und sie in der Richtung der Axe des Instrumentes durch die Oeffnung der Platte hindurch auf das Object concentrirt, das beobachtet werden soll. Die Objecte, die mittelst Mikroskop untersucht werden, sind immer äusserst dünn und fast immer durchsichtig; sind sie es nicht, so beleuchtet man sie von Oben her mittelst einer convexen Linse.

101. Beim Gebrauche des Mikroskopes zu wissenschaftlichen Untersuchungen ist es oft nothwendig die Vergrösserung desselben zu kennen. Um diese durch einen Versuch zu bestimmen, kann man sich eines Mikrometers und einer Camera lucida oder clara bedienen. Das Mikrometer ist eine Glasplatte, die mit einer sehr feinen Theilung, z. B. von hundert Theilstrichen auf ein Millimeter, versehen ist. Die Camera clara kann durch ein Planspiegelchen hergestellt werden, das in seiner Mitte eine sehr kleine Oeffnung hat, oder noch einfacher durch eine planparallele durchsichtige Glasplatte.

Es sei SM die Axe des Mikroskopes (Fig. 60); bei M, auf dem Objectträger, werde das Mikrometer und in S das durchbohrte Spie-

gelchen oder die durchsichtige Glasplatte unter 45⁰ gegen die Axe *SM* geneigt angebracht, ferner befinde sich bei *L* ein in Millimeter oder halbe Millimeter getheilter Maassstab und in *O*, so nahe am Spiegel als möglich, das Auge. Das vergrösserte Bild des Mikrometers, das in $M'M'$ erscheinen würde, wenn das Auge direct durch das Ocular in das Mikroskop blickte, wird durch Reflexion an *S* bei $M''M''$ erscheinen und indem man das Instrument gehörig stellt,

Fig. 60.



wird man es dahin bringen können, dass das Bild sich auf den Maassstab *L* projicirt, den man durch die Oeffnung des Spiegelchens oder durch die Glasplatte hindurch sehen wird. Man wird dann die Theilstrich aufsuchen, die coincidiren und wird z. B. finden, dass n Theile des vergrösserten Mikrometerbildes, n_1 Millimetern des Maassstabes entsprechen. Diess bedeutet, dass n Hundertstel Millimeter, m mal durch das Mikroskop vergrössert, gleich n_1 Millimeter werden; also ist:

$$\frac{n}{100}\, m = n_1\,, \qquad m = \frac{100\, n_1}{n}\,.$$

In vielen Mikroskopen kann ein Mikrometer auf dem Diaphragma angebracht werden. Sodann ist man im Stande mit Hilfe zweier Mikrometer die Vergrösserung m' des Objectives oder des aus dem Objectiv und der ersten Ocularlinse gebildeten Systemes zu bestimmen, je nachdem das Ocular ein positives oder ein negatives ist. Es genügt zu diesem Zwecke eines der beiden Mikrometer auf den Objectträger, das andere auf das Diaphragma zu bringen. Blickt man dann durch das Ocular, so wird man die Bilder der beiden

Mikrometer gleichzeitig sehen; aber eines von ihnen ist nur durch das Ocular, und zwar durch das ganze Ocular, wenn dieses ein positives, durch die zweite Linse desselben allein, wenn es ein negatives ist, vergrössert, das andere hingegen auch durch das Objectiv, beziehungsweise durch das aus Objectiv und erster Ocularlinse gebildete System. Man sucht die Theile, welche coincidiren und findet z. B. dass n' Theile des auf dem Objectträger liegenden Mikrometers, n_1' Theilen des anderen, auf dem Diaphragma gelegenen, entsprechen, diess heisst, dass die Länge von n' Hundertstel Millimeter multiplicirt mit m', gleich sind n_1' Hundertstel Millimeter; es ist also

$$n'm' = n_1', \qquad m' = \frac{n_1'}{n'}.$$

Kennt man die Vergrösserung des ganzen Mikroskopes und die Vergrösserung m' des Objectives, so kann man hieraus die Vergrösserung m'' des positiven Oculares oder der zweiten Linse des negativen Oculares finden, indem man die eine durch die andere dividirt, es ist:

$$m'' = \frac{m}{m'}.$$

Um die Grösse eines mikroskopischen Objectes zu messen, bringt man dasselbe auf den Objectträger und vergleicht es mit dem auf dem Diaphragma befindlichen Mikrometer; nimmt es n' Theilstriche ein, so ist seine wirkliche Grösse $\frac{n'}{m'}$ Hundertstel Millimeter. Oder auch, man legt das Object auf das Mikrometer und bringt das Ganze auf den Objectträger, dann beträgt die Grösse des Objectes so viele Hundertstel Millimeter, als Theile des Mikrometers von ihm bedeckt werden.

§ 5. *Das Fernrohr.*

102. Die Mikroskope vermitteln das Sehen von Objecten, die in der Entfernung des Nähepunktes keine hinreichende scheinbare Grösse besitzen würden, um gesehen werden zu können; die Fernrohre hingegen dienen dazu, das Sehen von Gegenständen möglich

zu machen oder zu erleichtern, die wegen ihrer Entfernung, mit unbewaffnetem Auge betrachtet, unter zu kleiner scheinbarer Grösse erscheinen würden. Die beiden Classen von Instrumenten befinden sich daher bezüglich der Objecte, die beobachtet werden sollen, unter ganz verschiedenen Bedingungen und es müssen sowohl für ihre Construction wie in ihren Eigenschaften wesentliche Unterschiede vorhanden sein.

Bei den Mikroskopen wird das Object sehr nahe an den ersten Brennpunkt des Objectives gebracht und sein Bild entsteht in grosser Entfernung vom zweiten Brennpunkte: es ist diess nothwendig um eine bedeutende Vergrösserung zu erzielen. Und da das Bild des gegebenen Objectes nahe an der ersten Brennebene des Oculares liegen muss, so muss die Distanz $\triangle$ zwischen der zweiten Hauptebene des Objectives und der ersten Hauptebene des Oculares bedeutend grösser sein als die Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ der Brennweiten des Objectives und des Oculares. Bei den Fernrohren hingegen befindet sich das Object weit vom vorderen Brennpunkt des Objectives entfernt und sein Bild liegt sehr nahe dem zweiten Brennpunkte; in der Nähe dieses Brennpunktes muss daher auch der erste Brennpunkt des Oculares sich befinden, und die Distanz $\triangle$ muss somit sehr nahe gleich der Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ werden.

Bei dem Mikroskope vermehrt man die Vergrösserung, indem man φ_1 möglichst klein wählt (95); das Objectiv erhält eine sehr kurze Brennweite, die um Vieles kleiner ist als die des Oculares. Bei dem Fernrohr hingegen wird das vom Objectiv erzeugte Bild um so grösser, je grösser die Brennweite desselben ist; das Objectiv hat also eine Brennweite, die vielmal grösser ist als die des Oculares.

Die Objectivöffnung ist bei den Mikroskopen sehr beschränkt, sie wird beschränkt durch die Nothwendigkeit, in das Instrument nur solche Strahlen gelangen zu lassen, die nahezu die Bedingungen für Centralstrahlen erfüllen; diese Oeffnung ist viel kleiner als die der Ocularlinsen. Bei einem Fernrohr aber, bei welchem die Entfernung des Objectes und die Krümmungsradien der Oberflächen des Objectives sehr gross sind, kann man Strahlen zulassen, die in weit von der Axe entfernten Punkten einfallen, ohne dass die Aber-

rationen, die hieraus entstehen, jene überschreiten würden, die sich durch eine schickliche Wahl der Krümmungsradien noch beheben lassen; die Oeffnung des Objectives ist daher nur beschränkt durch die Schwierigkeiten der Construction und da die Helligkeit erfordert, dass diese gross sei, so ist sie auch in der That immer beträchtlich grösser als die Oeffnungen der Ocularlinsen.

Bei Anwendung der Mikroskope können die zu beobachtenden Objecte nach Belieben dem Objective genähert werden und der Beobachter vermag immer jene Entfernung zu finden, die seiner deutlichen Sehweite entspricht; die Einstellung des Instrumentes für das deutliche Sehen geschieht, indem man das ganze dioptrische System verschiebt: das Instrument ist eines mit fixen Linsen. Bei einem Fernrohr jedoch ist die Lage des vom Objectiv erzeugten Bildes bestimmt durch die Lage des Objectes, das der Beobachter nicht verstellen kann; um dasselbe vermittelst des Oculares sehen zu können, muss derselbe letzteres gegen das Objectiv verschieben können, bis in die Bildebene jener Punkt fällt, der bezüglich des Oculares conjugirt ist zu dem Punkte, für welchen das Auge des Beobachters accommodirt ist. Ein Fernrohr muss also ein Instrument mit beweglichen Linsen sein: das Rohr, welches die Linsen enthält, muss aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine und zwar der grössere an einem Ende das Objectiv trägt und der andere, kleinere und kürzere Theil, das Ocular enthält und in den ersteren je nach Bedürfniss mehr oder weniger eingeschoben werden kann. Für einen und denselben Beobachter wird die Entfernung zwischen Objectiv und Ocular sich jedesmal ändern müssen, wenn sich die Distanz des beobachteten Objectes ändert; für dasselbe Object wird sich diese Distanz ändern je nach den Bedingungen die das Auge des Beobachters setzt.

103. Ein Mikroskop ist äquivalent einer fictiven unendlich dünnen Linse, die vollständig bestimmt ist, deren Fundamentalpunkte gefunden werden können, sobald die Anordnung des Instrumentes gegeben ist und die sich nicht ändern, weder mit der Veränderung der Bedingungen des Auges, noch durch Veränderung an dem Objecte, das man beobachtet: jene Linse kann zur Untersuchung aller Eigenschaften des Instrumentes dienen (96). Für

ein Fernrohr ist solches nicht möglich; die Fundamentalpunkte existiren entweder gar nicht, oder sie sind, wenn sie existiren, für ein und dasselbe Instrument ungemein grossen Aenderungen unterworfen. Setzen wir voraus, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, das Ocular sei convergent und nehmen wir die Entfernung des Objectes unendlich gross an; das vom Objectiv erzeugte Bild wird dann in die Brennebene desselben fallen. Der Beobachter, wenn er sein Auge für eine endliche Distanz accommodirt hat, wird alsdann den ersten Brennpunkt des Oculares vor den zweiten Brennpunkt des Objectives stellen und der Distanz $\triangle$ einen Werth geben, der kleiner ist als die Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ der beiden Brennweiten. Hieraus folgt, dass der Nenner $\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle$ in den Gleichungen

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle},$$

$$P_1 P = \frac{\varphi_1 \triangle}{\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle},$$

$$P_2' P' = - \frac{\varphi_2 \triangle}{\varphi_1 + \varphi_2 - \triangle}$$

(75) positiv sein wird; und weil die Zähler $\varphi_1 \varphi_2$, $\varphi_1 \triangle$, $\varphi_2 \triangle$ nur positiv sein können, wird φ positiv, $P_1 P$ positiv und $P_2' P'$ negativ. Das System ist demnach ein convergentes und hat seine erste Hauptebene ausserhalb des Instrumentes auf der Seite des Oculares und die zweite Hauptebene ebenfalls ausserhalb des Instrumentes, auf der Seite des Objectives. Da jedenfalls $\triangle$ nur sehr wenig von der Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ verschieden ist, so wird die Brennweite der dem Systeme aequivalenten Linse ungemein gross und die Linse selbst wird sehr weit vom Fernrohr entfernt sein. Ist das Auge des Beobachters hypermetrop und für convergente Strahlen accommodirt, so wird das System so einzustellen sein, dass der erste Brennpunkt des Oculares hinter dem zweiten Brennpunkt des Objectives zu liegen kommt, so dass also

$$\triangle > \varphi_1 + \varphi_2$$

wird. Der Nenner in den vorhergehenden Ausdrücken wird nun negativ und die dem Systeme aequivalente Linse wird eine divergente

mit sehr grosser Brennweite und in sehr grosser Entfernung gelegene. Wenn endlich das Auge emmetrop und auf unendliche Distanz accommodirt ist, d. h. im Ruhezustand sich befindet, so wird man den ersten Brennpunkt des Oculares mit dem zweiten Brennpunkt des Objectives zusammenfallen lassen; dann ist

$$\triangle = \varphi_1 + \varphi_2$$

und die Werthe von φ, P_1P, $P_2'P'$ werden unendlich: die Fundamentalpunkte liegen im Unendlichen und das System besitzt keine aequivalente unendlich dünne Linse, es ist ein telescopisches.

Dieser letzte Fall ist, wie schon im Artikel 86 bemerkt wurde, jener, den man als den normalen betrachtet. Daher rührt auch die Benennung „telescopisches System“, welche wir den Systemen beigelegt haben, die keine Fundamentalpunkte besitzen.

104. Das Objectiv der Fernrohre ist gewöhnlich eine achromatische Linse von grösserer Brennweite, ein derartig angeordnetes System, wie wir es im Artikel 77 d) betrachtet und in Fig. 47 dargestellt haben. Die erste Linse ist convergent und von Crown-, die zweite ist divergent und von Flint-Glas. Die Krümmungen der Flächen dieser beiden Linsen werden nach Methoden, die hier nicht näher erörtert werden können, so bestimmt, dass die sphärischen Abweichungen möglichst klein ausfallen und die Bilder des Objectes, die den verschiedenen Farben entsprechen so gut als möglich übereinander fallen. Um bei grossen astronomischen Fernrohren diese beiden Zwecke noch vollständiger zu erreichen, setzt man das Objectiv wohl auch aus drei Linsen zusammen.

Die Oculare sind verschiedene, und je nach der Art derselben unterscheidet man auch verschiedene Arten von Fernrohren. Wir werden sie in Fernrohre mit convergenten und in Fernrohre mit divergenten Ocularen eintheilen.

105. Die Fernrohre mit convergentem Ocular nennt man gewöhnlich astronomische Fernrohre. Sie lassen die Objecte verkehrt erscheinen.

Es gibt zwei Typen von convergenten Ocularen; das negative oder Huygens'sche oder Campani'sche und das positive oder Ramsden'sche Ocular.

Das Ocular von Campani ist ein aus zwei Linsen gebildetes

System, wie das im Artikel 77 b) betrachtete und in Fig. 45 dargestellte, angeordnet; es ist jenes, das fast ausschliesslich für Mikroskope angewendet wird (95). Nebst anderen Vortheilen besitzt es den, unter sonst gleichen Umständen ein grösseres Gesichtsfeld zu geben (92) und desshalb wird es auch für alle Instrumente vorgezogen, die kein Fadenkreuz haben. Soll das Fernrohr ein Fadenkreuz erhalten, so nöthigt das negative Ocular dasselbe zwischen den Ocularlinsen, in dem verschiebbaren Ocularrohr anzubringen und diess hat einen Nachtheil zur Folge, den wir bald näher kennen lernen werden.

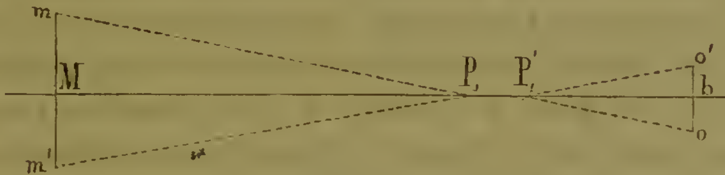
Das positive oder das Ocular von Ramsden besteht aus zwei convergenten Linsen, die wie in Fig. 44 angeordnet sind und wirkt wie im Artikel 77 a) angegeben wurde. Es ist in Wirklichkeit ein einfaches Mikroskop. Seine erste Brennebene, in deren Nähe das Bild sich befindet, das man betrachten will, liegt ausserhalb des Systemes, und das Fadenkreuz, das in die Ebene des Bildes fallen muss, kann unabhängig von dem Rohre, welches das Ocular enthält, angebracht werden. Desshalb verwendet man auch zu Fernrohren, die mit Messinstrumenten verbunden sind und ein Fadenkreuz benöthigen, am häufigsten das positive Ocular.

Das Instrument ist dann in folgender Weise eingerichtet. Ein kurzes Rohr enthält die beiden Linsen, ein anderes längeres Rohr das Diaphragma mit dem Fadenkreuz. Das erste dieser Rohre, das Ocular, ist in dem anderen mit Reibung verschiebbar und der Beobachter kann dasselbe, indem er es mehr oder weniger einschiebt, in jene Entfernung vom Fadenkreuz bringen, die für ihn zu deutlichem Sehen der Fäden nothwendig ist. Das System der beiden Rohre kann seinerseits wieder durch einen Trieb, oder auf andere Weise, in dem grösseren Rohre, welches das Objectiv trägt, verschoben werden, und mittelst dieser gemeinsamen Bewegung ist der Beobachter im Stande das Fadenkreuz in die Ebene des reellen, vom Objectiv erzeugten Bildes zu verlegen. Hat er vorher durch blosse Bewegung des Oculares dasselbe in solche Entfernung vom Fadenkreuz gestellt, dass die Fäden deutlich erscheinen, so wird er nunmehr auch das Object deutlich sehen, denn die beiden Bilder, das des Objectes und das des Fadenkreuzes, fallen übereinander.

Verschiebt man das Fadenkreuz, so wird sich im Allgemeinen auch die optische Axe des Instrumentes (94) verschieben. Desshalb kann man, strenge genommen, dieselbe nicht als eine gegen das Rohr des Instrumentes feste Gerade betrachten, ausser wenn die verschiedenen Objecte, die man anvisirt, alle in derselben Entfernung sich befinden. Andernfalls muss man für jede Beobachtung das Ocular verstellen und mit ihm das Fadenkreuz, und mit diesem verändert sich die Lage der optischen Axe.

Hieraus ergibt sich die Nothwendigkeit, bei den Fernrohren der geodaetischen Instrumente dafür zu sorgen, dass die optische Axe möglichst nahe parallel sei der geometrischen Axe des Rohres. Um diesen Parallelismus herzustellen, muss das Fadenkreuz in seiner

Fig. 61.



Ebene verschoben werden können. Desshalb wird dasselbe mit dem Rohre, in dem es sich befindet, nicht in unveränderlicher Weise verbunden, sondern wird festgehalten durch die Spitzen von vier Schrauben, welche die Wandung des Rohres an den Enden zweier zueinander senkrechten Durchmesser des Querschnittes durchsetzen; indem man diese dreht, können dem Diaphragma kleine Bewegungen in seiner Ebene nach zwei zueinander senkrechten Richtungen ertheilt werden. Die Schriften über Geodaesie enthalten ausführlich das einzuschlagende Verfahren, um in den verschiedenen Fällen, wie sie die Praxis bietet, zu erkennen, ob dieser Parallelismus vorhanden, und wenn er nicht vorhanden, wie er hergestellt werden kann; für uns genügt es die Methoden im Allgemeinen anzugeben. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

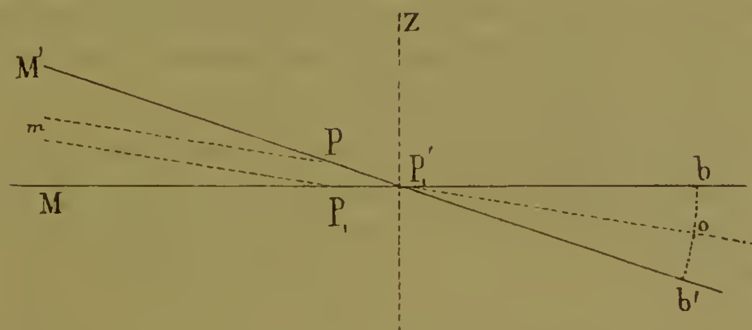
1. Das Fernrohr wird durch zwei Gabeln getragen, in denen es um die Axe des Rohres gedreht werden kann. Dieser Fall findet statt bei den Nivellirinstrumenten. Sodann stellt man in grösserer Entfernung eine getheilte Latte oder sonst ein verticales Absehen *M*

(Fig. 61) auf und visirt, indem man das Fernrohr möglichst horizontal richtet und dafür sorgt, dass zwei Schrauben des Fadenkreuzes in einer Verticalebene liegen, einen Punkt m der Latte an, d. h. man bringt das Bild des Punktes m mit dem Kreuzungspunkte der Fäden zur Deckung. Sind P_1 und P_1' die Hauptpunkte des Objectives, so wird die optische Axe nunmehr die Lage $P_1'o$, parallel zu mP_1 haben. Hierauf dreht man das Fernrohr um die Axe Mb seines Rohres um 180°. Der Kreuzungspunkt der Fäden kommt nach o', die optische Axe in die Lage $P_1'o'$ und der Punkt, dessen Bild mit dem Kreuzungspunkte der Fäden zusammenfällt, wird jener Punkt m' sein, in welchem die Latte von $P_1 m'$, der durch den ersten Hauptpunkt P_1 zu $o'P_1'$ parallel gezogenen Geraden getroffen wird. Man bestimmt sodann auf der Latte den Punkt M, der gleich weit von den beiden Punkten m und m' absteht und verschiebt, während man das Auge an das Fernrohr hält, das Fadenkreuz in seiner Ebene und in der Richtung $o'o$ solange, bis sich der Kreuzungspunkt der Fäden mit dem Bilde des Punktes M deckt. Dieselbe Correction führt man dann für die Ebene der beiden anderen Schrauben aus, d. h. für die zu $o'P_1 o$ senkrechte Ebene.

2. Das Fernrohr ist mit einer horizontalen Axe, um die es sich drehen lässt, fest verbunden und ein verticaler getheilter Kreis, der Zenithalkreis, gibt die Drehungswinkel an; das ganze aus dem Fernrohre, den Trägern seiner Axe und dem getheilten Kreise bestehende System ist ferner drehbar um eine verticale Axe, und ein zweiter getheilter, horizontaler Kreis, der Azimuthalkreis, misst die Drehungswinkel. Es ist dieser Fall für jene Winkelmessinstrumente vorhanden, die man Theodolite nennt. Von den vier Schrauben, die zwischen ihren Spitzen das Diaphragma mit dem Fadenkreuz halten, liegen zwei nahezu in einer verticalen und zwei in einer horizontalen Ebene (sind sie nicht derartig gestellt, so erreicht man diess, indem man einen ausserhalb befindlichen Ring, der die Schrauben enthält, entsprechend dreht); mit Hilfe der ersten beiden und des Verticalkreises lässt sich die Correction in der Verticalebene, durch die beiden anderen und den Horizontalkreis die Correction in der Horizontalebene ausführen. Um die erste dieser Correctionen zu machen, richtet man das Fernrohr auf einen weit entfernten Punkt m,

dessen Bild man mit dem Kreuzungspunkt o der Fäden (Fig. 62) zur Deckung bringt; die optische Axe wird so die Lage $P_1'o$ erhalten und die Axe des Rohres wird beispielsweise in Mb liegen. Man liest nun mittelst des Nonius den Winkel am Verticalkreis ab: dieser Winkel wird im Allgemeinen nicht der Winkel sein, welchen die Axe des Rohres mit der Verticalen $P_1'Z$ bildet, wird aber hiervon um eine constante Grösse differiren. Hierauf ertheilt man dem Instrumente eine halbe Umdrehung um die verticale Axe, so dass das Objectiv des Fernrohres gegen den Beobachter zu liegen kommt, dreht alsdann das Fernrohr um seine horizontale Axe, bis das Objectiv wieder gegen den Punkt m gewendet ist und bringt von Neuem das Bild dieses Punktes mit dem Kreuzungspunkt der Fäden zur

Fig. 62.



Deckung. Die optische Axe wird hierdurch ihre ursprüngliche Lage $P_1'o$ angenommen haben, aber die Axe des Rohres wird sich in einer anderen Lage $M'b'$ befinden. Am Verticalkreis liest man abermals den Winkel ab; würde die Gerade Mb mit $P_1'o$ zusammenfallen, so wäre dieser neue Winkel das Supplement des ersten, fällt aber Mb nicht mit $P_1'o$ zusammen, so wird man finden, dass der zweite Winkel vom Supplement des ersten verschieden ist, und zwar, wie sofort einleuchtet, um den Winkel $MP_1'M'$. Man nimmt die Hälfte dieser Differenz und dreht das Fernrohr um einen Winkel gleich dieser Hälfte, so dass $P_1'M$ parallel wird zu Pm. Sodann verschiebt man, während man durch das Fernrohr sieht, das Fadenkreuz solange, bis der Kreuzungspunkt mit dem Bilde des Punktes m zusammenfällt. In ähnlicher Weise wird die zweite Correction aus-

geführt, indem man statt des Verticalkreises den Horizontalkreis benützt.

Für astronomische Instrumente liegen die Objecte immer so weit, dass man sie als in unendlicher Entfernung gelegen betrachten kann. Ihre Bilder fallen daher immer genau in die Brennebene des Objectives und es ist nur nöthig, das Fadenkreuz ein für allemal in diese Ebene zu stellen. Unter diesen Verhältnissen kann man Beobachtungsreihen anstellen ohne nöthig zu haben etwas anderes als das Ocular zu verschieben; die optische Axe ist hier in Wirklichkeit fix und in unveränderlicher Lage gegen das Rohr, den eigentlichen Körper des Fernrohres. Diess erreichen zu können, macht den hauptsächlichsten Vorzug des positiven Oculares aus; mit einem Campani'schen Ocular wäre auch im gegenwärtigen Falle die optische Axe veränderlich und wenn die Correction, von der wir soeben gesprochen haben, nicht vollkommen ausgeführt wäre, so würde mit dem Oculare, so oft die Bedingungen des Auges sich ändern, jedesmal auch die optische Axe verschoben werden.

106. Die Fernrohre mit divergentem Oculare lassen die Objecte in ihrer wahren aufrechten Lage erscheinen. Zu dieser Art gehören das Galilei'sche und das terrestrische Fernrohr.

Das Ocular des Galilei'schen Fernrohres besteht aus einer einfachen divergenten Linse, aus einer Biconcavlinse (64), die so gestellt ist, dass ihr erster Brennpunkt nahe an den zweiten Brennpunkt des Objectives zu liegen kommt. Das Ocular wirkt wie die im Artikel 74, 2 b) (Fig. 41) untersuchte unendlich dünne Linse, und das ganze Instrument so, wie diess durch die Fig. 63 angezeigt wird. In dieser Figur sind der Einfachheit wegen Objectiv und Ocular durch aequivalente unendlich dünne Linsen ersetzt worden; W_1 ist das Objectiv, W_2 das Ocular, $\mu\nu$ die Oeffnung des Objectives, $\frac{F_1'}{F_2}$ ist der Punkt, in welchem, unter Voraussetzung des normalen Falles für das Instrument, der zweite Brennpunkt des Objectives und der erste des Oculares zusammenfallen, und F_2' ist der zweite Brennpunkt des Oculares. Die Geraden s, u, t sind drei Einfallsgerade, die einem schiefen cylindrischen Bündel angehören und die Figur zeigt, wie die entsprechenden Austrittsgeraden bestimmt werden:

man verlängert nämlich uW_1 bis B, wo diese Gerade die Brennebene $F_1'B$ schneidet, so ist B der Punkt, gegen welchen alle Strahlen des Bündels convergiren, nachdem sie durch das Objectiv gegangen sind; die den s und t entsprechenden, aus dem Objectiv tretenden Strahlen sind daher μB und νB, und die aus dem ganzen Instrumente tretenden Strahlen sind die zu W_2B parallelen Geraden ms', qu', nt'.

Der Punkt ω, in welchem die Austrittsgerade qu' die Axe schneidet, ist der Augenpunkt, die Ebene $\mu'\omega\nu'$ ist die Ebene des Ocularkreises, μ' und ν', in denen diese Ebene von den Austrittsgeraden s' und t' geschnitten wird, sind die zu μ und ν conjugirten

Fig. 63.

Punkte, und daher ist $\mu'\nu'$ der Durchmesser des Ocularkreises. Um die Lage und Grösse dieses Kreises durch eine geeignetere und grössere Genauigkeit gewährende Construction zu finden, genügt es, μM parallel zur Axe zu ziehen und M mit F_2' zu verbinden; der Schnittpunkt μ' dieser Geraden mit μW_2 ist der zu μ conjugirte Punkt. Man kann auch μF_2 und durch h, dem Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene der Linse W_2, $h\mu'$ parallel zur Axe ziehen; der Durchschnitt dieser Geraden mit MF_2' ist ebenfalls das Bild des Punktes μ. Ist so μ' gefunden, so liefert das aus μ' auf die Axe gefällte Perpendikel $\mu'\omega$ den Augenpunkt.

In dem Galilei'schen Fernrohre kommen keine reellen Bilder zu Stand, und desshalb lässt sich auch kein Fadenkreuz in Anwendung bringen. Der Ocularkreis liegt innerhalb des Instrumentes

und das Gesichtsfeld ist gegeben durch die Formeln (18′) und (19′) des § 3.

107. Statt als Ocular ein einfaches Mikroskop zu benutzen, wie es beim astronomischen Fernrohre geschieht, kann man ein zusammengesetztes Mikroskop in Anwendung bringen. Da das zusammengesetzte Mikroskop ein divergentes System ist (96), so erhält man auf diese Weise ein divergentes Ocular, das aus convergenten Linsen besteht; solcher Art ist das Ocular des terrestrischen Fernrohres.

An Stelle des Objectives von sehr kurzer Brennweite, wie es die eigentlichen Mikroskope besitzen, tritt jetzt ein System von zwei Linsen, welche so angeordnet sind, wie die beiden Linsen in Fig. 46, und welches System die im Artikel 77 c) angegebene Wirkung hat. Diese Wirkung ist aequivalent der einer einzigen convergenten Linse, deren zweite Hauptebene jedoch in relativ grosser Entfernung vor der ersten liegt und die Fundamentalpunkte folgen in der Ordnung $P'FF'P$ aufeinander. Die Wichtigkeit dieses Umstandes ist klar; wenn man (Fig. 46) in die Ebene P eine Linse mit einer Brennweite stellen wollte, die gleich ist jener des Systemes, so würde sie von dem Objecte aA, welches jetzt das vom Objectiv erzeugte Bild ist, ein Bild geben, das zwar congruent wäre dem vom Systeme erzeugten Bilde bB, von diesem aber zur Rechten in einer Entfernung gleich $P'P$ sich befände.

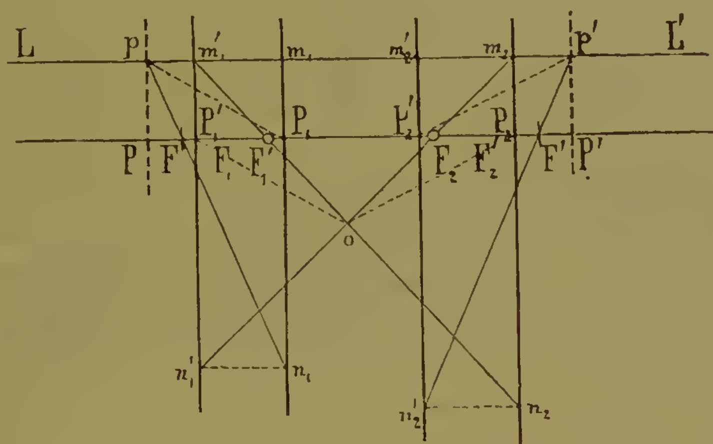
Um ebensoviel müsste dann auch das Ocular des Mikroskopes, durch welches das Bild bB betrachtet wird, nach rechts hinausgeschoben werden; das Fernrohr würde viel länger ausfallen. Zwei Linsen statt einer anzuwenden, um ein divergentes Ocular oder aufrechte Bilder zu erhalten, hat also eine Verkürzung des Instrumentes zur Folge.

In die Fig. 64 sind die Lagen der Fundamentalpunkte $P_1'F_1F_1'P_1$ des besprochenen Systemes, der beiden umkehrenden Linsen, wie man sie nennen kann und die Lagen der Fundamentalpunkte eines Campani'schen Oculares $P_2'F_2F_2'P_2$ eingezeichnet, welches zusammen mit ersterem Systeme das Mikroskop bildet, das als Ocular des terrestrischen Fernrohres dient.

Die im Artikel 76 gezeigte Construction, lehrt mit Hilfe dieser

Punkte die Lagen der Fundamentalpunkte des vollständigen Oculares kennen. Zu diesem Zwecke ziehe man LL' parallel zur Axe; dieser Geraden, als Einfallsgerade betrachtet, entspricht bezüglich des ersten Systemes die Austrittsgerade $m_1'F_1'n_2$, und als Austrittsgerade betrachtet, entspricht ihr bezüglich des zweiten Systemes die Einfallsgerade $m_2F_2n_1'$. Die beiden Geraden $m_1'n_2$, m_2n_1' schneiden sich in o, dem Punkte, der bezüglich des einen und des andern der beiden Systeme den Punkten, in denen LL' die beiden Hauptebenen schneidet, conjugirt ist. Wenn man daher oP_1' und oP_2 zieht und durch P_1 und P_2' die Geraden P_1p und $P_2'p'$ zu ersteren parallel, so erhält man in p und p', den Schnittpunkten der Ge-

Fig. 64.



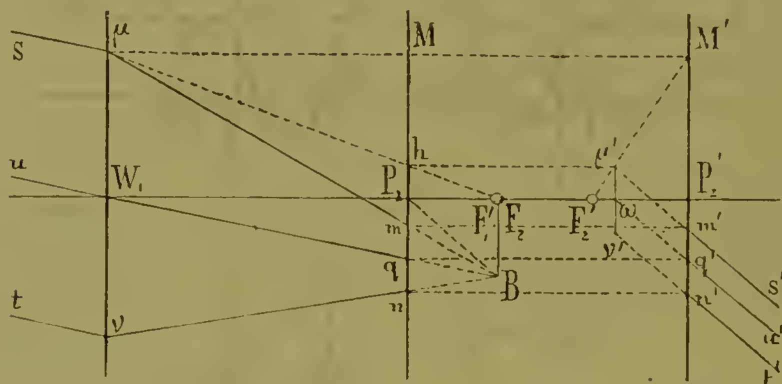
raden P_1p, $P_2'p'$ mit LL', die beiden Punkte der Hauptebenen. Um die beiden Brennpunkte zu erhalten ziehe man $n_1'n_1$ und n_2n_2' parallel zur Axe und hierauf die Geraden pn_1 und $p'n_2'$; die Punkte F und F', in denen diese Geraden die Axe schneiden sind die beiden Brennpunkte des vollständigen Systemes. Man bemerkt, dass für das ganze Ocular, die Fundamentalpunkte in der Ordnung $PFF'P'$ aufeinanderfolgen, und dass desshalb das Ocular ein divergentes ist. Weiter bemerkt man, indem man die Lagen der Fundamentalpunkte der beiden Partial-Systeme gegen die Linsen in Berücksichtigung zieht, dass alle vier Fundamentalpunkte des Systemes ausserhalb des Röhrenstücks liegen, das die vier Linsen enthält;

die beiden ersten PF befinden sich zur Linken, vor der ersten Linse, die beiden anderen $P'F'$ zur Rechten ausserhalb des Instrumentes.

Zu denselben Resultaten würden die Formeln (6''), (5''), (7'') des Artikels 75 führen, wenn wir wiederholen würden, was im Artikel 96 für das Mikroskop durchgeführt wurde.

Die Figur 65 gibt die Zusammenstellung des vollständigen Fernrohres; $\mu W_1 \nu$ ist das Objectiv, der Einfachheit wegen als unendlich düne Linse angenommen, $P_2 F_2 F_2' P_2'$ sind die Fundamentalpunkte des Oculares, mit F_2 fällt der zweite Brennpunkt F_1' des Objectives zusammen. Die Geraden s, u, t sind drei zu einander parallele Einfallsgerade; nachdem sie das Objectiv durchsetzt haben,

Fig. 65.



verwandeln sie sich in drei, im Punkte B zusammenlaufende Gerade, in dem Punkte nämlich, in welchem uW_1 verlängert die Brennebene $F_1'B$ des Objectives schneidet. Die drei Geraden μB, $W_1 B$, νB treffen die erste Hauptebene P_2 des Oculares in den Punkten m, q, n, und diesen sind bezüglich des Oculares conjugirt die Punkte m', q', n', welche auf den durch m, q, n parallel zur Axe gezogenen Geraden liegen. Die drei Strahlen treten also nach den Geraden $m's'$, $q'u'$, $n't'$ aus, die durch m', q', n' parallel zu $P_2 B$ gezogen werden. Der Schnittpunkt der Geraden $q'u'$ mit der Axe ist der Augenpunkt ω, und die Schnitte der Geraden $m's'$, $n't'$ mit der Ebene des Ocularkreises bestimmen dessen Durchmesser. Um Lage und Grösse dieses Kreises durch eine geeignete Construction zu

finden, können wir die Gerade $\mu M M'$ parallel zur Axe ziehen und M' mit F_2' verbinden; ziehen wir dann noch μF_2 und durch h, ihrem Schnittpunkt mit der Hauptebene P_2 eine Parallele zur Axe, so wird der Punkt μ', in welchem diese Parallele die Gerade $M'F_2'$ trifft, der zu μ conjugirte Punkt sein; $\mu'\omega$ ist dann der Radius des Ocularkreises und ω der Augenpunkt.

Man ersieht aus dieser Construction, dass der Augenpunkt zwischen die beiden Punkte $F_2' P_2'$ fällt; diese liegen aber ausserhalb des Instrumentes, also wird auch der Ocularkreis ausserhalb des Fernrohres liegen.

Es ist diess der hauptsächlichste Unterschied zwischen dem terrestrischen Fernrohr mit convergenten Linsen und dem Galilei'schen Fernrohr. Da der Ocularkreis ausserhalb liegt, so ist das Gesichtsfeld mittels der Gleichungen (15′) und (15″) des § 3 zu berechnen.

In einem terrestrischen Fernrohr kommen zwei reelle Bilder zu Stande, eines in F_1', das andere in der zu F_1' bezüglich der beiden umkehrenden Linsen und der Collectivlinse conjugirten Ebene; man pflegt jedoch in diesen Fernrohren kein Fadenkreuz anzuwenden.

108. Die Eigenschaften der Fernrohre sind ein spezieller Fall der in § 3 allgemein für zusammengesetzte Instrumente entwickelten, und in die allgemeinen, in diesem § enthaltenen Formeln, hat man für Fernrohre einfach

$$\delta' = D = a$$

zu setzen.

Die Vergrösserung ist durch die Gleichungen (4), (5), (6) und (7) des Art. 87 gegeben. Nennt man D die Entfernung des Objectes von der ersten Hauptebene des Objectives, so ist die Vergrösserung

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{D}{D-\varphi_1}\left(1+\frac{\varphi_2-d}{\delta}\right), \tag{4}$$

wenn das Fernrohr für ein auf die Distanz δ accommodirtes Auge eingestellt wird, und

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\cdot\frac{D}{D-\varphi_1}, \tag{5}$$

wenn das Auge auf unendliche Entfernung accommodirt ist. Nimmt man die Entfernung des Objectes als unendlich gross an, so hat

man an Stelle des Factors $\frac{D}{D-\varphi_1}$ die Einheit zu setzen und die Vergrösserung wird in den beiden Fällen entweder

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(1 + \frac{\varphi_2 - d}{\delta}\right), \tag{6}$$

oder

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{7}$$

Die Bedingungen, unter welchen für das Instrument die letztere Formel gilt, sind jene, die man als die normalen betrachtet (103); da aber anderntheils in allen Fällen $\frac{D}{D-\varphi_1}$ sehr nahe gleich Eins und der Werth von $\frac{\varphi_2 - d}{\delta}$ sehr klein ist, so kann man die Formel (7) als für alle Fälle giltig ansehen. Sie sagt, dass die Vergrösserung eines Fernrohres gleich ist dem mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Verhältnisse zwischen der Brennweite des Objectives und der Brennweite des Oculares. Ist die so berechnete Vergrösserung positiv, so erscheinen die durch das Fernrohr betrachteten Gegenstände in ihrer wahren Lage, nämlich aufrecht; ergibt sich die Vergrösserung negativ, so erscheinen die Objecte, durch das Fernrohr gesehen, umgekehrt.

Wir konnten diesen Satz voraussehen. In der That, wenn das Object im Unendlichen liegt, so gelangen die von irgend einem seiner Punkte ausgegangenen Strahlen parallel zu einander zum Instrumente, und wenn das Instrument für ein auf unendliche Entfernung accommodirtes Auge eingestellt ist, so werden diese Strahlen auch parallel unter einander aus dem Instrumente treten; das Fernrohr ist unter diesen Bedingungen ein telescopisches System (46). Im Artikel 50 wurde aber bewiesen, dass, wenn zwei cylindrische Lichtstrahlenbündel, die mit einander einen Winkel ω bilden, durch das telescopische System gehen, aus diesem Systeme austretend einen Winkel ω' mit einander bilden, der zu ω in einem constanten Verhältnisse steht. Ferner wurde gezeigt, dass, wenn das telescopische System in zwei nichttelescopische Systeme zerlegt werden kann, von denen das erste eine erste Brennweite gleich der Länge f_1 und das

zweite eine zweite Brennweite gleich der Länge f_2' besitzt, der constante Werth des Verhältnisses $\frac{\omega'}{\omega}$ gleich $\frac{f_1}{f_2'}$ ist. In unserem Falle ist das System zusammengesetzt aus Objectiv und Ocular; für ersteres ist $f_1 = -\varphi_1$ und für das zweite $f_2' = \varphi_2$, also wird

$$\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{7'}$$

Es ist aber leicht einzusehen, dass das Verhältniss $\frac{\omega'}{\omega}$, das wir im Artikel (50) die Winkelvergrösserung des Systemes nannten, in unserem Fall die Vergrösserung des Fernrohres ist, indem wir diesem Worte die Bedeutung geben, welche die Definition im Art. 87 verlangt. Denken wir uns in der That, dass das betrachtete Object ein Stück einer zur Axe senkrechten Geraden sei und nennen wir a und b seine Endpunkte. Von a und b gelangen an das Objectiv zwei cylindrische Strahlenbündel, die mit einander den Winkel ω bilden; und wenn wir an dem vom Scheitel des Objectives eingenommenen Punkte den vorderen Knotenpunkt des Auges verlegten, so würden auf der Netzhaut die Bilder von a und b in den Punkten entstehen, in denen diese von den Parallelen zu den beiden Bündeln, gezogen aus dem zweiten Knotenpunkte, geschnitten wird; der Sehwinkel, unter dem das Object ab erscheinen würde, wäre gleich dem Winkel dieser beiden Geraden, also gleich ω. Wird hingegen das Object durch das Fernrohr betrachtet, so kommen die Bilder der beiden Punkte a und b in jenen Punkten auf der Retina zu Stande, in denen sie von den Geraden, gezogen aus dem zweiten Knotenpunkte des Auges, getroffen wird, die den beiden austretenden Strahlencylindern parallel sind und die mit einander den Winkel ω' einschliessen; der Sehwinkel, unter dem jetzt das Object ab erscheint, ist also ω'. Das Verhältniss nun des Sehwinkels, unter dem ein Object erscheint, wenn es mit Hilfe des Instrumentes betrachtet wird, zum Sehwinkel, unter dem es mit blossem Auge gesehen erscheinen würde, ist das, was man die Vergrösserung nennt, somit ist $\frac{\omega'}{\omega}$ die Vergrösserung des Fernrohres und die Formel (7′) ist identisch mit der Formel (7).

109. Der Augenpunkt ist bestimmt durch die Gleichung (8) des Art. 88

$$d = \frac{\varphi_2 \triangle}{\triangle - \varphi_2},$$

worin d die Entfernung des Augenpunktes von der zweiten Hauptebene des Oculares und $\triangle$ der Abstand der ersten Hauptebene des Oculares von der zweiten Hauptebene des Objectives ist. Für den Fall eines telescopisch angeordneten Fernrohres ist $\triangle - \varphi_2 = \varphi_1$ und dann können wir auch schreiben:

$$d = \triangle \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \text{ oder auch } d = -\frac{\triangle}{m_1}.$$

110. Der Radius des Ocularkreises ist im allgemeinsten Falle durch die Gleichung (10) Art. 90 gegeben, die sich in unserem Falle auf

$$\frac{R}{r} = m \qquad (10')$$

reducirt und aussagt, dass das Verhältniss des Objectivdurchmessers zum Durchmesser des Ocularkreises gleich ist der Vergrösserung des Fernrohres.

Diese Formel ist richtig, wie auch das Fernrohr eingestellt sein mag. Wenn das Instrument einem auf unendliche Distanz accommodirten Auge angepasst ist, wird sie ein spezieller Fall einer allgemeineren Formel, die wir für telescopische Systeme bewiesen haben. Wir haben nämlich gezeigt (48), dass für irgend ein telescopisches System die lineare Vergrösserung constant ist und dass, wenn das System in zwei nichttelescopische Systeme zerlegt werden kann, von denen dem ersten die zweite Brennebene f_1', dem zweiten die erste Brennweite f_2 zukommt, der constante Werth der linearen Vergrösserung

$$l = \frac{f_2}{f_1'}$$

ist. In unserem Falle haben wir $f_2 = -\varphi_2$, $f_1' = \varphi_1$, daher

$$l = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{1}{m_1},$$

wie diess übrigens schon im Art. 51 gefunden wurde für telescopische Systeme, in denen das erste, das letzte und das mittlere Medium gleiche Brechungsindices besitzen. Nun verstanden wir aber unter der linearen Vergrösserung das Verhältniss der Länge eines auf dem Bilde gelegenen geradlinigen Segmentes zur Länge des entsprechenden Segmentes des (eben vorausgesetzten) Objectes; nehmen wir als Object die Vorderfläche des Objectives, so werden wir als Bild den Ocularkreis zu nehmen haben; es wird daher

$$l = \frac{r}{R},$$

und diess in die letzte Gleichung substituirt, erhalten wir

$$\frac{R}{r} = m_1.$$

Für telescopische Systeme im Allgemeinen wurde ferner bewiesen (49), dass die lineare Vergrösserung des Systemes gleich ist dem Verhältniss des Durchmessers eines austretenden cylindrischen Strahlenbündels zum Durchmesser des entsprechenden einfallenden Strahlencylinders. Diesen Satz auf ein telescopisch adjustirtes Fernrohr angewendet, können wir sagen: die lineare Vergrösserung des Fernrohres ist gleich dem Verhältniss des Durchmessers eines austretenden Strahlencylinders zum Durchmesser des entsprechenden einfallenden Bündels. Da nun in diesem Falle die Winkelvergrösserung gleich ist dem reciproken Werthe der linearen Vergrösserung, so können wir auch weiter sagen: die Vergrösserung eines Fernrohres ist gleich dem Verhältnisse des Durchmessers eines einfallenden Strahlencylinders zum Durchmesser des entsprechenden austretenden cylindrischen Strahlenbündels.

Dieser von Lagrange herrührende allgemeine Satz ist, wie unmittelbar einleuchtet, in dem vorhergehenden Satze enthalten.

111. Wir wissen (91), dass die Helligkeit eines Instrumentes wächst, wenn der Durchmesser des Objectives zunimmt, solange der Ocularkreis kleiner ist als die Pupille, dass sie einen grössten Werth annimmt, der sich weiter mit dem Wachsen der

Objectivöffnung nicht mehr ändert, wenn der Ocularkreis die Grösse der Pupillenöffnung erreicht hat. Diesem Werthe der Grösse des Ocularkreises entspricht ein Werth R des Radius der ersten Oberfläche des Objectives, der, mit ϱ den Radius der Pupille bezeichnet, bestimmt ist durch die Gleichung (13′) des Art. 91:

$$R = m\varrho.$$

Wenn die Schwierigkeiten der Construction oder andere Umstände nicht hinderlich sind, so ist dem Radius der Objectivöffnung ein Werth zu geben, der nicht kleiner ist als der durch die Formel bestimmte; die Oeffnung, die man dem Objectiv geben soll, ist somit der Vergrösserung proportional.

Nehmen wir beispielsweise an, der Radius der Pupille betrage 2 Millimeter, so finden wir aus der letzten Gleichung entsprechend den Vergrösserungen

10, 20, 50, 100, 200

dass die zugehörigen Objectivdurchmesser sein müssten

4, 8, 20, 40, 80

Centimeter.

Die Schwierigkeit, Objective von grossem Durchmesser herzustellen, macht es unmöglich, das Maximum der Helligkeit bei Instrumenten mit bedeutender Vergrösserung zu erreichen und beschränkt desshalb auch die praktisch noch erreichbare Vergrösserung. Bezüglich der Fernrohre, die zu astronomischen Untersuchungen dienen, ist übrigens noch eine Bemerkung zu machen. Da Fixsterne durch das Fernrohr nicht irgend merkbar vergrössert gesehen werden, so besteht der einzige Effect desselben darin, die Lichtmenge, die in das Auge gelangt, in dem Verhältnisse von R^2 zu ϱ^2 zu vergrössern. Andererseits wird sich aber die Helligkeit des Hintergrundes, die allgemeine Helligkeit des Firmamentes, vermindern im Verhältniss von r^2 zu ϱ^2, und aus diesem doppelten Grunde wird der Stern heller erscheinen. Daher ist es nöthig, starke Vergrösserungen anzuwenden, wenn man noch lichtschwache Sterne sehen will, und mässige Vergrösserungen zu gebrauchen, wenn man Körper von merkbarer scheinbarer Grösse beobachtet.

112. Das Gesichtsfeld eines Fernrohres ist ohne Weiteres durch die Gleichungen (15′), (15″) des Art. 92, oder auch durch (18′)

und (19′) des Art. 93 gegeben. Wenn der Ocularkreis ausserhalb liegt, so beträgt das halbe Gesichtsfeld

$$\psi = -\frac{R' - r}{d - v'} \frac{1}{m_1}, \text{ oder auch } \psi = \frac{R' - r}{d - v'} \frac{\varphi_2}{\varphi_1};$$

wenn der Ocularkreis innerhalb liegt, wird das halbe Gesichtsfeld

$$\psi' = \frac{\varrho - r}{d_1 + h} \cdot \frac{1}{m_1},$$

falls der Ocularkreis kleiner ist als die Pupille, es wird aber

$$\psi'' = \frac{r - \varrho}{d_1 + h} \cdot \frac{1}{m_1},$$

wenn der Ocularkreis grösser als die Pupille ist.

113. Um die Vergrösserung eines Fernrohres experimentell zu bestimmen, gibt es verschiedene Verfahrungsarten. Von diesen sind einige directe, d. h. es werden direct die Winkel zweier einfallender und der ihnen entsprechenden austretender Strahlenbündel gemessen oder mit einander verglichen; andere sind indirecte, d. h. bei diesen Methoden werden gewisse Grössen gemessen, die mit der Vergrosserung nach den oben gegebenen Formeln im Zusammenhange stehen und aus welchen die Vergrösserung berechnet werden kann.

Unter den directen Methoden besteht die einfachste darin, dass man ein Object mit dem einen Auge durch das Fernrohr, mit dem anderen Auge direct betrachtet; mit einiger Uebung gelingt es die beiden Bilder zur Deckung zu bringen, nämlich das vergrösserte, durch das Fernrohr auf der Netzhaut des einen Auges entworfene und das kleinere, welches auf der Netzhaut des anderen Auges entsteht, mit dem man neben dem Fernrohr hinsieht. Ist man im Stande zu ermitteln, wie vielmal eine Dimension des kleineren Bildes in der homologen Dimension des vergrösserten Bildes enthalten ist, so hat man durch diese Zahl sofort die Vergrösserung gegeben. Diese Ermittlung des Verhältnisses der beiden Bilder kann mit einer gewissen Annäherung geschehen, wenn das betrachtete Object eine in gleiche Theile eingetheilte Ebene ist, wie z. B. ein Dach, dessen Ziegel Streifen von gleicher Breite bilden, ein Gitter oder

noch besser ein Massstab, der in geeigneter Weise in grössere Theile getheilt ist. Wenn n durch das Fernrohr gesehene Theile n' mit freiem Auge gesehene Theile decken, so ist die Vergrösserung

$$m = \frac{n'}{n} \cdot$$

Statt die scheinbaren Grössen eines und desselben Objectes zu vergleichen, unter denen es durch das Fernrohr und mit freiem Auge gesehen erscheint, kann man auch die Entfernungen hierzu wählen, in welche zwei gleiche Objecte gebracht werden müssen, damit die scheinbare Grösse des einen, durch das Fernrohr gesehenen Objectes, gleich werde der scheinbaren Grösse des anderen, gegen welches man mit blossem Auge blickt. Man stellt sich zwei gleichgrosse, weisse Kreisflächen von 20 bis 30 Centimeter Durchmesser auf schwarzem Hintergrunde her, bringt den einen in eine Entfernung von 50 bis 100 Meter und sieht auf ihn durch das Fernrohr, den andern in eine solche Entfernung, dass er mit freiem Auge gesehen, gleich gross mit ersterem erscheint. Die Gleichheit der beiden scheinbaren Grössen ergibt sich, indem man durch gehörige Stellung der Axe des freien Auges, die beiden Bilder entweder zur Deckung oder zur Berührung bringt. Ist die scheinbare Gleichheit hergestellt, so hat man nur die Entfernung der mit blossem Auge gesehenen Scheibe zu messen und die Entfernung der durch das Fernrohr beobachteten Scheibe durch die erstere zu dividiren; der so erhaltene Quotient ist gleich der Vergrösserung.

Die Vergleichung der scheinbaren Grössen lässt sich mit grösserer Genauigkeit und viel grösserer Bequemlichkeit ausführen, indem man zwischen Object und Fernrohr eine Linse so stellt, dass sie die von irgend einem Punkte des Objectes ausgegangenen Strahlen parallel macht und hierdurch gestattet, das Object aus einer kleinen Distanz zu betrachten, während doch das Fernrohr für sehr grosse Entfernungen eingestellt ist. In dieser Weise verfährt Waltenhofen, indem er mit etwas Wachs auf das Objectiv eine dünne Linse von grösserer Brennweite klebt, vor dem so modificirten Fernrohr in die vordere Brennebene der genannten Linse

einen getheilten Massstab stellt, dessen Theile von dem Beobachter am Fernrohr noch deutlich unterschieden werden können und das Fernrohr so einstetlt, dass durch dasselbe der Massstab deutlich gesehen wird. Weil die am Objectiv angebrachte Linse divergente Strahlenbündel, die von den Punkten des Massstabes ausgehen, parallel macht, ist somit das Fernrohr auf unendliche Entfernung eingestellt. Sieht man nun mit dem einen Auge direct, mit dem anderen durch das Fernrohr auf den Massstab, so wird man aus der Anzahl der mit freiem Auge gesehenen Massstabtheile, die in einem Theile des durch das Fernrohr vergrösserten Massstabes enthalten sind, die Vergrösserung des Fernrohres erhalten. Es ist dieses leicht einzusehen. Sei φ die Brennweite der am Objectiv angebrachten Linse, l die Länge des Fernrohres, n die Zahl der obengenanten Theile und k die Länge eines Massstabtheiles. Der Winkel der beiden cylindrischen Bündel, in welche die hinzugefügte Linse zwei Bündel verwandelt, die von den beiden Enden eines Massstabtheiles ausgingen, ist $\frac{k}{\varphi}$ und daher, wenn m die Vergrösserung bedeutet, der Winkel, um welchem die Bündel aus dem Ocular tretend gegeneinander geneigt sind $m\frac{k}{\varphi}\cdot$ Dieser ist aber gleich dem Sehwinkel, unter welchem mit blossem Auge n Theile das Massstabes erscheinen, also gleich dem Winkel $\frac{nk}{\varphi+l}$, daher ist

$$m\frac{k}{\varphi} = \frac{nk}{\varphi+l},$$

woraus folgt

$$m = \frac{n\varphi}{\varphi+l}.$$

Die angegebenen Methoden nöthigen den Beobachter, gleichzeitig mit beiden Augen, die sich unter verschiedenen Bedingungen befinden zu sehen, die beiden Bilder zur Deckung zu bringen und mit einander zu vergleichen. Diese Vergleichung, die bei einiger Uebung mit hinreichender Genauigkeit gelingt, wenn die beiden Bilder nicht sehr verschiedene Grössen haben, also die Vergrös-

serung klein ist, wird sehr unsicher und schwierig, wenn das durch das Fernrohr gesehene Bild das andere bedeutend übertrifft, wenn die Vergrösserung beträchtlich ist. Man hat dann viele Theile abzuzählen und diess dauert längere Zeit, während welcher das Auge leicht ermüdet oder seine Lage ändert. Man kann diesen Uebelstand beseitigen, indem man sich, wie bei den Mikroskopen, einer camera clara bedient. Als von der Bestimmung der Vergrösserung eines Mikroskopes die Rede war (101), haben wir schon gezeigt, wie man als camera clara eine einfache ebene Glasplatte verwendet. Man richtet das Fernrohr horizontal auf ein in gleiche Theile eingetheiltes Object, dessen Entfernung vom Objectiv bekannt ist, z. B. auf eine in geeigneter Weise mit einer Theilung versehene Latte, wenn man mit grösserer Genauigkeit verfahren will. Man setzt dann vor das Ocular eine durchsichtige Glasplatte und zwar in der Weise unter 45^0 gegen die Axe des Fernrohres geneigt, dass das Auge darüber gehalten und von Oben nach Unten sehend, das von der Platte reflectirte Licht erhält, welches aus dem Fernrohr getreten ist, gleichzeitig aber, wegen der Durchsichtigkeit der Platte, auf ein Papierblatt sieht, das vertikal unter dem Oculare auf einer Tischplatte angebracht wird. In dieser Weise sieht man das vergrösserte Bild der getheilen Latte, oder irgend eines Gegenstandes, auf welchen das Fernrohr gerichtet ist, auf das Papierblatt projicirt, und kann es daselbst mittelst eines Bleistiftes nachzeichnen. Man misst die Länge eines Theiles der so erhaltenen Zeichnung des Maassstabes und dividirt sie durch die Entfernung des Auges vom Papier; der Quotient ist dann die scheinbare Grösse eines durch das Fernrohr gesehenen Theiles. In ähnlicher Weise gibt die Division der wirklichen Länge eines Theiles auf der Latte durch ihre Entfernung vom Objective die scheinbare Grösse eines mit freiem Auge gesehenen Theiles. Das Verhältniss zwischen dem ersten Quotienten und dem letzteren ist die Vergrösserung.

Die bisher beschriebenen Methoden sind ebensoviele Kunstgriffe um das Verhältniss zwischen dem Winkel zweier austretender zum Winkel der entsprechenden einfallenden Strahlencylinder zu messen, ohne hiezu eines Winkelmessinstrumentes zu bedürfen. Es ist aber viel genauer und bei Messungen für wissenschaftliche Zwecke bei

Weitem vorzuziehen, diese beiden Winkel mit Hilfe eines Theodoliten zu bestimmen. Gauss welcher zuerst auf diese Weise die Vergrösserung der Fernrohre ermittelte, verfuhr hiebei auf folgende Art. Er wendete das Ocular des Fernrohres gegen zwei weit entfernte Punkte, die so gewählt waren, dass sie durch das umgekehrte Instrument, indem man das Auge an das Objectiv hielt, beide gleichzeitig gesehen wurden, ohne das Instrument verstellen zu müssen. Die Winkeldistanz der beiden Punkte wird in dieser Weise gesehen so vielmal verkleinert erscheinen, als sie durch das Fernrohr, wenn man dasselbe in der gewöhnlichen Weise anwendete, vergrössert würde. In dieser Lage des Fernrohres, stellt Gauss demselben auf der Seite des Objectives einen Theodoliten gegenüber und richtet das Fernrohr desselben so, dass erst das Bild des einen der beiden Punkte mit dem Kreuzungspunkt der Fäden zusammen fällt, sodann bringt er es in die Lage, für welche das Bild des anderen Punktes in dem Kreuzungspunkt zu liegen kommt. Der Winkel, um welchen das Fernrohr des Theodoliten gedreht werden muss, um aus der ersten in die zweite Lage zu kommen, ist gleich jenem, welchen die beiden Strahlencylinder, die von den beiden Punkten ausgegangen sind, bei ihrem Austritte aus dem Objectiv des zu untersuchenden Fernrohres bilden. Visirt man dann direct die beiden Punkte an, so misst man den Winkel der beiden Strahlencylinder bei ihrem Eintritte in das Ocular; dieser Winkel durch den ersten dividirt gibt die gesuchte Vergrösserung.

Von Porro wurde die Methode von Gauss dahin modificirt, dass er, statt das Ocular gegen die beiden Punkte zu wenden und den verkleinerten Winkel, der aus dem Objectiv tretenden Strahlencylinder zu messen, das Objectiv des zu untersuchenden Fernrohres den beiden Punkten zukehrte, und mittelst eines Theodoliten den vergrösserten Winkel der aus dem Oculare tretenden Strahlencylinders bestimmte. Wenn man in dieser Weise vorgeht, verliert man an Helligkeit, weil die betrachteten Objecte zweimal vergrössert werden, einmal durch das dem Versuche unterworfene Fernrohr, dann durch das Fernrohr des Theodoliten; man gewinnt aber an Genauigkeit, weil der zu messende Winkel grösser und der relative Fehler der Messung somit kleiner ist.

Wenn das Fadenkreuz des Fernrohres, das man zu untersuchen hat, mehrere Fäden enthält, deren Winkeldistanz bekannt ist, so würde es genügen mit dem Fernrohre des Theodoliten nacheinander diese Fäden einzuvisiren. Indem man dann den so gemessenen Winkel durch die Winkeldistanz der Fäden dividirt, erhielte man die Vergrösserung.

114. Die indirecten Methoden zur Bestimmung der Vergrösserung reduciren sich im Wesentlichen auf zwei.

Die erste und zugleich am Nächsten liegende besteht darin, dass man die Brennweite φ_1 des Objectives und die Brennweite φ_2 des Oculares jede für sich misst und dann die Vergrösserung mit Hilfe der Formel (7)

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

berechnet (108).

Die immer grosse Brennweite des Objectives kann man mit grosser Genauigkeit und Bequemlichkeit bestimmen, indem man dieses Objectiv vor das eines andern, bereits für grosse Entfernungen eingestellten Fernrohres bringt, und den Ort aufsucht, in welchem man eine Schrift oder eine feinere Zeichnung aufzustellen hat, damit dieselbe durch das Fernrohr und durch das zu untersuchende Objectiv deutlich gesehen werde. Die Ebene, in welcher die Schrift sich befindet, wenn sie deutlich gesehen wird, ist die gesuchte Brennebene. Die Hauptpunkte desselben Objectives sind meist bekannt und in geringem Abstande von den Scheiteln der äusseren Linsenflächen; ist also die Lage des Brennpunktes gegeben, so erhält man hieraus auch mit hinreichender Genauigkeit die Brennweite. Weniger leicht und meist unsicher ist aber die Bestimmung der Brennweite des Oculares, und damit die Methode, um die es sich handelt, erfordert weitläufige und mühsame Operationen, um genauere Resultate zu liefern.

Die andere indirecte Methode zur Bestimmung der Vergrösserung der Fernohre gründet sich auf die Ermittlung des Verhältnisses des Objectivdurchmessers zum Durchmesser des Ocularkreises. Dieses Verhältniss, gleich dem der Radien $\frac{R}{r}$, ist die Vergrösse-

rung (110). Die Messung des Objectivdurchmessers bietet keine weiteren Schwierigkeiten dar; um aber den Durchmesser des Ocularkreises zu finden, bedient man sich eigener Apparate, die man Dynameter nennt.

Das einfachste Dynameter ist jenes von Ramsden und kann in dem Falle verwendet werden, in welchem der Ocularkreis ausserhalb des Instrumentes liegt. Es besteht aus drei kleineren Rohren, die ineinander verschiebar sind. Das erste dieser Rohre ist beiderseits offen und kann an das Ocular des Fernrohres mit Hilfe dreier Schrauben befestiget werden; das zweite Rohr ist an seinem, dem Ocular zugewendeten Ende durch eine sehr dünne Glasplatte geschlossen, auf der eine Mikrometertheilung eingravirt ist, und das dritte enthält eine convergente Linse von kurzer Brennweite, welche als einfaches Mikroskop zum deutlichen Sehen der Mikrometers dient. Um diesen Apparat in Anwendung zu bringen, wendet man das Fernrohr gegen eine gleichförmig beleuchtete Fläche oder gegen das diffuse Licht des Himmels, verstellt dann die Linse des Dynameters, indem man das betreffende Rohr aus- oder einschiebt so lange, bis die Striche des Mikrometers deutlich gesehen werden und indem man hierauf das aus Mikrometer und der Linse des Dynameters gebildete System weiter verschiebt, stellt man das Mikrometer in jene Distanz vom Ocular, für welche der Durchmesser des Kreises, der von den Strahlen die aus dem Oculare treten beleuchtet wird, ein Minimum ist. Dieser Kreis vom kleinsten Durchmesser ist das Bild der Vorderfläche des Objectives, ist also der Ocularkreis. Aus der Zahl der Mikrometertheile die er bedeckt, bestimmt sich sein Durchmesser; durch diesen dividirt man den Durchmesser der Vorderfläche des Objectives und der Quotient gibt die gesuchte Vergrösserung an.

In der einfachen Weise construirt, wie wir angegeben haben, kann das Dynameter von Ramsden nicht angewendet werden, wenn der Ocularkreis im Inneren des Instrumentes liegt. Man kann aber diesen Mangel vermeiden und den Apparat für alle Fälle tauglich machen, indem man an dem vorderen Ende des Rohres, welches das Mikrometer trägt, eine convergente Linse anbringt, mit deren Hilfe auf der Ebene des Mikrometers ein reelles Bild des Ocularkreises

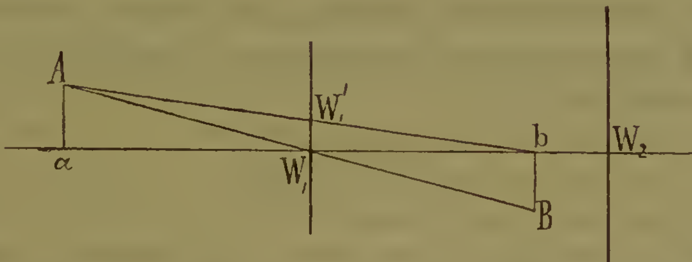
erzeugt wird. Da die Entfernung dieses Bildes von der Linse für ein gegebenes Dynameter constant bleibt, so bleibt auch das Verhältniss seines Durchmessers zum Durchmesser des Ocularkreises constant; man kann daher aus der Grösse des ersteren, die an dem Mikrometer gemessen wird, die Grösse des letzteren durch Multiplication mit einem bekannten Coefficienten ableiten. In dieser Weise sind die Dynameter von Troughton und Simms in London construirt. Bei ihnen ist der Durchmesser des am Mikrometer gemessenen Bildes das Doppelte von dem des Ocularkreises.

Ein weniger einfacher Apparat, der es aber dennoch verdient, dass wir ihn näher kennen lernen, ist das Dynameter mit Doppelbild von Dollond. Dieses Dynameter besteht aus zwei convergenten Linsen, die zusammen wie das Objectiv und das Ocular eines zusammengesetzten Mikroskopes von schwacher Vergrösserung wirken; die erste erzeugt ein reelles Bild des Ocularkreises, die zweite dient als einfaches Mikroskop zur Beobachtung dieses Bildes. Die vordere Linse aber, die als Objectiv wirkt, ist nach einem Durchmesser in zwei Theile zerschnitten und die beiden Halblinsen werden parallel zu diesen Durchmesser um gleiche Stücke verschoben, die eine in dem einen, die andere im entgegengesetztem Sinne, mit Hilfe einer Mikrometerschraube, die an dem Apparate angebracht ist. Die Mikrometerschraube ist mit einer getheilten Trommel versehen, und gestattet den Abstand der Mittelpunkte der beiden Halblinsen mit grosser Genauigkeit zu messen. Der Apparat wird an das Ocularrohr des zu untersuchenden Fernrohres befestiget und zwar so, dass man es vor und zurückschieben kann, bis die leuchtende Scheibe, das Bild der Vorderfläche des Objectives in grösstmöglicher Deutlichkeit erscheint. Ist dieses erreicht, so kann nun mit dem Apparate gemessen werden. Man dreht zu diesem Zwecke die Mikrometerschraube, sofort sieht man an Stelle einer Scheibe, zwei erscheinen, die zuerst sich noch grösstentheiles decken, deren Mittelpunkte aber allmälig immer weiter auseinanderrücken, je mehr sich die Mittelpunkte der Halblinsen von einander entfernen. Man dreht die Mikrometerschraube so lange, bis die beiden Scheiben sich gegenseitig berühren. Man liest nun die Zahl der Umdrehungen und mit Hilfe der Trommel an der Mikrometerschraube, die Bruch-

theile derselben ab, die man der Schraube ertheilt hat, und aus dieser Zahl, die proportional ist der gegenseitigen Verschiebung der beiden Halblinsen, ergibt sich durch Rechnung der Durchmesser des Ocularkreises.

Es ist leicht zu sehen, in welcher Weise der Durchmesser des Ocularkreises und die gegenseitige Entfernung der Mittelpunkte der beiden Halblinsen, für den Fall der Berührung der beiden leuchtenden Scheiben, zusammenhängen. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, die Linsen aus denen der Apparat zusammengesetzt ist seien unendlich dünn; es sei dann W_1 (Fig. 66) die getheilte Linse und W_2 die Ocularlinse des Dynameters. Weiters sei a der Augenpunkt und bB die bezüglich der Linse W_1 zur Ebene des Ocularkreises conjugirte Ebene. Diese Ebene muss bezüglich des Ocu-

Fig. 66.



lares W_2 conjugirt sein jener Ebene, auf welche das Auge des Beobachters accommodirt ist, und im Falle dieses Auge ein emmetropes, auf unendliche Distanz accommodirtes ist, muss die Ebene bB mit der Brennebene der Linse W_2 zusammenfallen; ist das Auge nicht auf unendliche Entfernung accommodirt, so wird diese Ebene eine andere, aber in jedem Falle bestimmte und für jeden Beobachter nahezu constante Lage haben. Fallen die Scheitel der beiden Halblinsen im Punkte W_1 zusammen, so bilden sie eine einzige Linse und erzeugen vom Ocularkreis ein einziges Bild, das man in bekannter Weise ermitteln kann; sein Centrum sei in b, und der dem A conjugirte Punkt wird in B, dem Schnittpunkte der Geraden AW_1 mit der Ebene bB, liegen. Wenn hingegen die Scheitel der beiden Halblinsen nicht coincidiren, so wird jede von ihnen vom

Kreise aA ein anders gelegenes Bild geben und wenn wir voraussetzen, dass die Scheitel der Halblinsen in der Ebene der Figur um gleiche Stücke nach der einen und der anderen Seite der Axe verschoben seien, so werden die beiden Bilder sich in b berühren, wenn bezüglich einer der beiden Halblinsen, b der zu A conjugirte Punkt geworden ist, wenn also die Punkte A und b auf einer Geraden mit der neuen Lage des Scheitels W_1' dieser Halblinse liegen. Die beiden ähnlichen Dreiekc aAb, $W_1 W_1' b$ geben dann

$$aA = W_1 W_1' \frac{ab}{W_1 b},$$

und hieraus folgt, wenn wir wie früher den Radius des Ocularkreises mit r bezeichnen, ferner bemerken, dass die Verschiebung $W_1 W_1'$ einer der beiden Halblinsen proportional ist der Anzahl Theile n, die am Kopfe der Mikrometerschraube abgelesen werden und den Winkel messen um welche dieselbe gedreht wurde, dass man also, unter K einen constanten Coefficienten verstanden, setzen kann $W_1 W_1' = Kn$,

$$r = K \frac{ab}{W_1 b} n.$$

Solange der Apparat von einem und demselben Beobachter angewendet wird, ändert sich die Lage der Ebene bB nicht, in der sich das Bild des Ocularkreises befinden muss, damit es deutlich gesehen werde; es bleiben daher auch die Distanzen ab und $W_1 b$ constant und somit auch der Coefficient $K \frac{ab}{W_1 b}$. Der Beobachter kann sich ein für allemal den Werth dieses Coefficienten bestimmen, indem er mittelst des Dynameters einen fein getheilten Maassstab betrachtet und die Umdrehungen n und deren Bruchtheile mit Hilfe des getheilten Schraubenkopfes zählt, die nöthig sind, damit die beiden Bilder eines bestimmten Theiles des Maassstabes sich unmittelbar aufeinander folgen.

Die Nothwendigkeit dieser jedesmaligen Bestimmung könnte man vermeiden und die Ermittlung des Coefficienten von n könnte ein für alle Mal von dem Verfertiger des Apparates allein gemacht

werden, wenn man in der Ebene bB, unveränderlich gegen das Objectiv, ein Fadenkreuz anbrächte und die Ocularlinse in ein verschiebbares Rohr einsetzte, mit Hilfe dessen jeder Beobachter, bevor er das Dynameter anwendet, die Linse W_2 in jene Position bringt in der er das Fadenkreuz deutlich sieht.

Die auf Anwendung des Dynameters gegründete Messungsmethode setzt voraus, dass die ganze Oberfläche des Fernrohrobjectives wirksam sei, d. h. dass die von seinen verschiedenen Punkten kommenden Strahlen auch das ganze Instrument durchsetzen, ohne auf ihrem Wege aufgefangen zu werden. Die Diaphragmen aber, die im Inneren des Fernrohres sich befinden, können Strahlen abblenden, die in das Instrument durch den peripherischen Theil des Objectives getreten sind und das Bild desselben nur auf einen Theil reduciren. Um zu erkennen, ob dieser Umstand vorhanden ist, verringert man die Oeffnung des Objectives durch ringförmige Deckel, welche immer grössere Theile bedecken und beobachtet, ob die Grösse des Ocularkreises sich entsprechend verringert. Geschieht diess nicht, so muss man schliessen, dass der bedeckte peripherische Theil des Objectives unwirksam ist und um die Messung mit dem Dynameter ausführen zu können, hat man vorher durch einen ringförmigen Deckel von entsprechender Grösse den freien Theil des Objectives zu verringern.

Im Artikel 110 ist bemerkt worden, dass die Vergrösserung eines Fernrohres, wenn dasselbe ein telescopisches System bildet, gleich ist dem Verhältnisse des Durchmessers eines einfallenden Strahlencylinders zum Durchmesser des entsprechenden austretenden Strahlencylinders. Lagrange, dem man diesen Satz verdankt, hat schon bemerkt, dass man auf ihn eine Methode zur Messung der Vergrösserung gründen kann. Diese Methode, ähnlich der soeben beschriebenen, hätte vor dieser den Vorzug, dass sie den Durchmesser des austretenden Strahlenbündels in einer beliebigen Distanz vom Ocularkreis zu messen, und daher auch das Dynameter von Ramsden bei Fernrohren anzuwenden gestattet, bei denen der Ocularkreis im Innern des Instrumentes liegt; sie bietet hingegen die Unbequemlichkeit, dass bei ihr das Licht, bevor es auf das Objectiv fällt, in ein Parallelstrahlenbündel verwandelt werden muss. Wenn diese Bedingung,

die nicht so einfach erreicht werden kann, nicht erfüllt ist, so wäre man genöthigt in dem austretenden Strahlenbündel den kleinsten Querschnitt aufzusuchen, und die Methode würde dann mit der von Ramsden und Dollond identisch werden.

ANHANG.

§ 1. Weitere bemerkenswerthe Punkte eines dioptrischen Systemes.

115. Die Brennpunkte, Hauptpunkte und Knotenpunkte, die als Fundamentalpunkte bezeichnet wurden, genügen vollständig, um alle auf ein dioptrisches System bezüglichen Fragen zu lösen; hierzu benöthigt man eigentlich nur die Brenn- und Hauptpunkte, da die Knotenpunkte sofort bestimmt werden können, sobald die erstgenannten Punkte gegeben sind (Art. 35). Ueberdiess wird die Lösung der betreffenden Aufgaben einfach in Folge der einfachen Eigenschaften der zur Axe senkrechten Ebenen oder der Strahlenbündel, die durch diese Fundamentalpunkte hindurchgehen.

Ausser diesen Punkten gibt es aber in einem centrirten dioptrischen Systeme noch andere bemerkenswerthe Punkte, denen gleichfalls besonders einfache Eigenschaften zukommen, vermöge welcher sie zur Ermittlung conjugirter Punkte oder Strahlen verwendet werden können und durch entsprechende Combination mit den bereits bekannten Punkten Lösungen gestatten, die an Einfachheit den im ersten Theile angegebenen nicht nachstehen. Desshalb können wir auch diese Punkte, zu deren Betrachtung wir nun übergehen, als Fundamentalpunkte des dioptrischen Systemes bezeichnen.

Es seien (Fig. 67) F, F' P, P' die Brenn- und Hauptpunkte eines gegebenen dioptrischen Systemes, LL' und MM' zwei zur Axe parallele Gerade, die sich zu beiden Seiten in gleichem Abstande von derselben befinden. Ist LL' eine Einfallsgerade, so entspricht ihr als Austrittsgerade jene, die durch den Schnittpunkt p' der

ersteren mit der zweiten Hauptebene und dem zweiten Brennpunkt F' geht und welche die Gerade MM' treffen mag im Punkte r'. Betrachtet man ferner MM' als Austrittsgerade, welche die erste Hauptebene in q schneidet, so entspricht ihr die Einfallsgerade Fq, die ihrerseits die Gerade LL' in r trifft. Durch r gehen demnach zwei Einfallsgerade LrL' und rFq, deren entsprechende Austrittsgeraden $p'F'r'$ und $Mr'M'$ sich in r' schneiden, daher ist r' der zu r conjugirte Punkt.

Die beiden durch r und r' senkrecht zur Axe gelegten Ebenen $r\overline{P}$ und $r'\overline{P}'$ sind desshalb ebenfalls conjugirt zu einander und der Construction nach ist für ein Paar auf diesen Ebenen gelegenen conjugirten Punkten r, r', das Verhältniss ihrer Abstände $r\overline{P}$, $r'\overline{P}'$ von der Axe gleich der negativen Einheit; dieses Verhältniss ist das gleiche für irgend ein anderes Paar conjugirter Punkte, die auf diesen Ebenen liegen (15). Die beiden Ebenen $r\overline{P}$ und $r'\overline{P}'$ haben demnach die Eigenschaft, dass irgend eine Gerade, die durch den Punkt C auf der Axe, den Halbirungspunkt der Strecke $\overline{P}\overline{P}'$, hindurchgeht, die beiden Ebenen in conjugirten Punkten schneidet.

Wie bei den GAUSS'schen Hauptebenen, befinden sich demnach auch bei den genannten Ebenen zwei conjugirte Punkte in gleichen Abständen von der Axe; nur liegen diese Punkte auf derselben Seite der Axe, wenn es sich um die Hauptebenen, auf entgegengesetzten Seiten, wenn es sich um die Ebenen $r\overline{P}$ und $r'\overline{P}'$ handelt. Der perspectivische Mittelpunkt der beiden conjugirten Ebenen liegt im ersten Falle unendlich weit, im zweiten Falle in der Mitte zwischen den beiden Ebenen, und zugleich in der Mitte zwischen den beiden Knoten N und N'.

Die beiden Ebenen $r\overline{P}$, $r'\overline{P}'$ wurden von TÖPLER als die negativen Hauptebenen, und ihre Schnittpunkte $\overline{P}\,\overline{P}'$ mit der Axe, als die negativen Hauptpunkte des dioptrischen Systemes, $\overline{P}$ als der erste, $\overline{P}'$ als der zweite bezeichnet. Aus der Construction der beiden conjugirten Punkte r, r' in Fig. 67 folgt sogleich:

$$\overline{P}F = FP, \qquad P'F' = F'\overline{P}';$$

die negativen Hauptpunkte stehen von den Brennpunkten ebensoweit, aber nach entgegengesetzten

Seiten hin, ab, als die entsprechenden Gauss'chen Hauptpunkte, so dass der erste Brennpunkt in der Mitte zwischen den beiden ersten, der zweite Brennpunkt in der Mitte zwischen den beiden zweiten Hauptpunkten liegt.

116. Es seien (Fig. 67) N und N' die Knotenpunkte des gegebenen Systemes. Wir fassen einen Punkt der ersten Brennebene in's Auge, etwa den Punkt s, in welchem diese Ebene von der Geraden LL' geschnitten wird. Allen Einfallsgeraden die durch s gehen, entsprechen Austrittsgerade, die sämmtlich parallel sind zur Geraden sN, welche den Punkt s der ersten Brennebene, mit dem ersten Knotenpunkte N verbindet. Von diesen Einfallsgeraden betrachten

Fig. 67.

wir jene, welche zu sN bezüglich sF symmetrisch liegt und die Axe schneiden mag im Punkte $\overline{N}$. Die ihr entsprechende, zu sN parallele Austrittsgerade (in der Figur nicht verzeichnet), wird die Axe in einem Punkte $\overline{N}'$ schneiden, der zu $\overline{N}$ conjugirt ist. Die eben genannten durch $\overline{N}$ und $\overline{N}'$ gehenden conjugirten Strahlen schliessen mit der Axe gleiche Winkel ein, die aber nach der im Art. 13 getroffenen Uebereinkunft bezüglich der Winkelzählung entgegengesetzte Vorzeichen haben; das Verhältniss der beiden Winkel ist also gleich der negativen Einheit. Legen wir durch die Punkte $\overline{N}$ und $\overline{N}'$ zwei zur Axe senkrechte Ebenen, so erhalten wir zwei conjugirte Ebenen, welche (16) die Eigenschaft haben, das zwei Austrittsgerade, die sich in irgend einem Punkte der

durch $\overline{N}'$ gelegten Ebene schneiden, einen Winkel einschliessen, der gleich und entgegengesetzt ist dem Winkel, den die entsprechenden Einfallsstrahlen mit einander bilden, die aus dem zu ersterem conjugirten Punkte in der durch $\overline{N}$ gelegten Ebene gezogen werden.

Die beiden genannten Ebenen wurden von Töpler, welcher sie so wohl, wie die im vorhergehenden Artikel angegebenen Ebenen zuerst namhaft machte, als die negativen Knotenebenen, ihre Schnittpunkte $\overline{N}$, $\overline{N}'$ mit der Axe, als die negativen Knotenpunkte des dioptrischen Systemes bezeichnet.

Um noch die Lage des Punktes $\overline{N}'$ anzugeben, haben wir nur zu bedenken, dass allen Austrittsgeraden, die durch einen Punkt, etwa t, der zweiten Brennebene hindurchgehen, Einfallsgerade entsprechen werden, die sämmtlich parallel sind der Geraden, die den zweiten Knotenpunkt N' mit t verbindet. Zieht man also $t\overline{N}'$ symmetrisch zu tN' bezüglich tF', so ist $t\overline{N}'$ jene Austrittsgerade, die einer durch $\overline{N}$ gehenden Einfallsgeraden entspricht, welche mit der Axe einen Winkel gleich $tN'X$ einschliesst und somit ist $\overline{N}'$ der zu $\overline{N}$ conjugirte Punkt.

Aus diesen Constructionen folgt sofort:

$$\overline{N}F = FN; \quad N'F' = F\overline{N}';$$

die negativen Knotenpunkte befinden sich in denselben Entfernungen von den bezüglichen Brennpunkten, nur nach entgegengesetzen Richtungen hin gelegen, wie die Listing'schen Knotenpunkte, so dass der erste Brennpunkt in der Mitte zwischen den beiden ersten, der zweite Brennpunkt in der Mitte zwischen den beiden zweiten Knotenpunkten gelegen ist.

Hat man überhaupt zwei conjugirte Punkte A, A' auf der Axe gegeben und betrachtet man irgend zwei durch A und A' gehende conjugirte Strahlen, die sich in b schneiden mögen; legt man ferner durch b eine zur Axe senkrechte Ebene, welche diese Axe in B trifft, so wird man wegen der Kleinheit der Winkel ω und ω' der beiden Strahlen Ab und $A'b$ mit der Axe haben

$$\omega = \frac{bB}{BA}, \quad \omega' = \frac{bB}{BA'}$$

und hieraus:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{BA}{BA'}.$$

Da nun dieses Winkelverhältniss ungeändert bleibt, wenn man irgend zwei andere durch A und A' gehende conjugirte Strahlen auswählt, so bemerkt man, dass der Punkt B für alle solche Strahlenpaare derselbe ist, oder anders ausgedrückt, dass die Schnittpunkte conjugirter Strahlen der beiden durch die conjugirten Axenpunkte A und A' gehenden Strahlenbündel in einer und derselben, zur Axe senkrechten Ebene liegen. Diese Ebene bezeichnet man als den perspectivischen Durchschnitt der beiden Strahlenbündel.

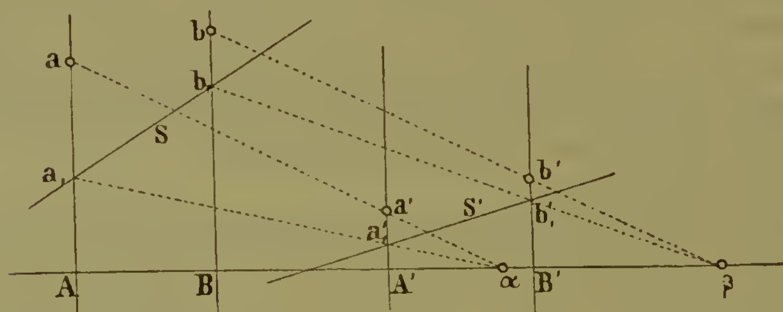
Für die beiden Listing'schen Knotenpunkte liegt die perspectivische Durchschnittsebene unendlich weit, für die negativen Knotenpunkte hingegen liegt sie in der Mitte zwischen den beiden Knotenpunkten und halbirt zugleich den Abstand der Gauss'schen Hauptebenen (Uu, Fig. 67).

117. Es sei für ein gegebenes dioptrisches System zu einem bestimmten Punkte a der conjugirte a' bekannt. Legen wir durch a und a' zwei zur Axe senkrechte Ebenen aA, $a'A'$ Fig. 68, welche diese Axe in den Punkten A und A' schneiden, so erhalten wir zwei conjugirte Ebenen, und wenn wir die Gerade aa' bis zum Durchschnitt α mit der Axe verlängern, so ist α der Punkt, durch welchen überhaupt jede Verbindungslinie zweier conjugirter Punkte der beiden Ebenen aA und $a'A'$ hindurch gehen muss. Wird nun weiter irgend eine Einfallsgerade S gegeben, so kann man sofort einen Punkt angeben, durch welchen die zugehörige Austrittsgerade hindurchgeht. In der That, man suche den Schnittpunkt a_1 von S mit der Ebene aA und ziehe die Gerade $a_1\alpha$; der Punkt a_1', in welchem diese die Ebene $a'A'$ trifft, ist der zu a_1 conjugirte Punkt, also auch ein Punkt der zu S conjugirten Geraden S'.

Ist ausser dem Paar conjugirter Punkte aa', noch ein zweites Paar $b\,b'$ bekannt, so ist es möglich, durch dieselbe Construction, die den Punkt a_1' lieferte, bezüglich der beiden Ebenen bB, $b'B'$

und ihres perspectivischen Mittelpunktes β noch einen zweiten Punkt b_1' zu finden, durch welchen S' hindurchgeht, den Punkt nämlich auf $b'B'$, welcher dem Schnittpunkte b_1 von S mit der Ebene $b\ B$ conjugirt ist. Mit Hilfe zweier Paare conjugirter Punkte, die nicht auf der Axe liegen, kann also zu jedem einfallenden Strahle der entsprechende austretende gefunden werden. Man kann dieses Resultat auch in dem folgenden Satze aussprechen:

Fig. 68.



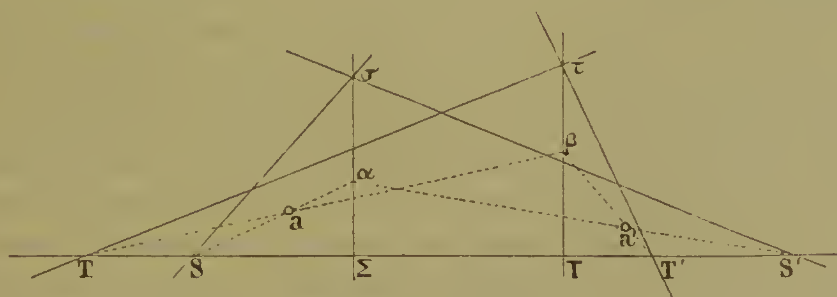
D i e W i r k u n g e i n e s d i o p t r i s c h e n S y s t e m e s i s t v o l l k o m m e n b e s t i m m t, w e n n f ü r d i e s e s S y s t e m z w e i P a a r e c o n j u g i r t e r P u n k t e, d i e n i c h t a u f d e r A x e l i e g e n o d e r, w a s d a s s e l b e s a g t, z w e i P a a r e c o n j u g i r t e r, z u r A x e s e n k r e c h t e r E b e n e n n e b s t i h r e m A e h n l i c h k e i t s v e r h ä l t n i s s, g e g e b e n s i n d.

Die erste und zweite Gauss'sche Hauptebene, die erste und zweite negative Hauptebne, die erste Brennebene und die unendlich ferne Ebene im letzten Medium, die unendlich ferne Ebene im ersten Medium und die zweite Brennebene sind Paare conjugirter Ebenen, für die das Aehnlichkeitsverhältniss besonders einfache Werthe besitzt. Hierbei mag daran erinnert werden, dass für die beiden letztgenannten Ebenenpaare die Aehnlichkeitscentra mit den beiden Listing'schen Knotenpunkten zusammenfallen (39). Indem man an Stelle der Ebenenpaare aA, $a'A'$; bB, $b'B'$ irgend zwei der genannten vier Ebenenpaare setzt, nimmt die Construction conjugirter Strahlen in Fig. 68 eine entsprechend einfachere Form an.

118. Zu einem bestimmten einfallenden Strahle $S\sigma$ Fig. 69,

welcher die Axe schneidet im Punkte S, sei der zugehörige austretende Strahl $\sigma S'$ bekannt, der die Axe treffen wird in einem Punkte S', dem zu S conjugirten Punkte. Da die beiden genannten conjugirten Strahlen in einer Ebene liegen, so werden sie sich in einem Punkte σ schneiden, und wenn wir durch σ eine zur Axe senkrechte Ebene $\sigma\Sigma$ legen, so wird in dieser Ebene auch der Punkt liegen, in dem sich irgend eine andere durch S gehende Einfallsgerade mit der ihr entsprechenden Austrittsgeraden, die durch S' geht, schneidet. Die Ebene $\sigma\Sigma$ ist der perspectivische Durchschnitt der beiden conjugirten Strahlenbündel, die ihre Mittelpunkte in S und S' haben. Ist nun weiter irgend ein Punkt a gegeben, der als Kreuzungspunkt einfallender Strahlen betrachtet wird, so kann man mit Hilfe der gegebenen conjugirten Strahlen $S\sigma$, $\sigma S'$, sofort einen Strahl bestimmen, auf welchem der ihm conjugirte Punkt a' liegen wird. Zu diesem Zwecke hat man nur den Schnittpunkt α des Strahles Sa mit der Ebene $\sigma\Sigma$ zu suchen und die Verbindungsgerade $\alpha S'$ zu ziehen, diese ist der Strahl, auf welchem a' liegen wird.

Fig. 69.



Ist ausser dem Paare conjugirter Strahlen $S\sigma$, $\sigma S'$, noch ein zweites Paar $T\tau$, $\tau T'$ bekannt, so kann man ebenso mit Hilfe der zur Axe senkrechten Ebene τT einen zweiten Strahl $\beta T'$ angeben, auf welchem a' liegt, den Strahl nämlich, der conjugirt ist zum Strahle $Ta\beta$. Sind also zwei Paare conjugirter Strahlen, welche die Axe schneiden, bekannt, so kann man zu jedem Punkte seinen conjugirten finden. Wir haben daher den Satz:

Die Wirkung eines dioptrischen Systemes ist vollkommen bestimmt, wenn für dieses System zwei Paare

conjugirter Strahlen, welche die Axe schneiden, oder, was dasselbe sagt, zwei Paare conjugirter Axenpunkte nebst den entsprechenden perspectivischen Durchschnitten der Strahlenbündel, die in ihnen liegen, gegeben sind.

Der erste und zweite LISTING'sche Knotenpunkt, der erste und zweite negative Knotenpunkt, der erste Brennpunkt und der unendlich ferne Axenpunkt im letzten Medium, der unendlich ferne Axenpunkt im ersten Medium und der zweite Brennpunkt sind Paare conjugirter Axenpunkte, für welche das Verhältniss der Neigungswinkel der hindurchgehenden Strahlen gegen die Axe, besonders einfache Werthe, und somit die entsprechenden perspectivischen Durchschnitte bemerkenswerthe Lagen annehmen. Für die beiden letztgenannten Punktepaare sind die GAUSS'schen Hauptebenen die perspectivischen Durchschnitte.

Indem man nun an Stelle der Punktepaare S, S'; T, T', irgend zwei der genannten vier Punktepaare treten lässt, wird die Construction conjugirter Punkte in Fig. 69 speciellere und einfachere Formen annehmen.

119. Ist die Wirkung des dioptrischen Systemes durch Angabe zweier Paare conjugirter Strahlen bestimmt, welche die Axe schneiden, und legt man durch diese Schnittpunkte Ebenen senkrecht zur Axe, so erhält man zwei Paare conjugirter Ebenen. In Folge des im Artikel 33 nachgewiesenen Satzes ist aber für jedes dieser Paare conjugirter Ebenen auch das Aehnlichkeitsverhältniss bekannt; denn sind ω und ω' die Neigungswinkel zweier conjugirter Strahlen gegen die Axe, y und y' die Entfernungen zweier conjugirter Punkte von der Axe, die in jenen zur Axe senkrechten Ebenen liegen, welche durch die Schnittpunkte der Strahlen mit der Axe hindurchgehen, so ist nach Gleichung (III):

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \frac{\omega}{\omega'}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der Inhalt des Satzes im Artikel 118 identisch ist mit dem des vorhergehenden Satzes im Artikel 117. Letzterer aber ist bereits im Artikel 45 enthalten und zur

Anwendung gekommen, als die erste der Methoden dargelegt wurde, durch welche für ein gegebenes dioptrisches System Haupt- und Brennpunkte experimentell bestimmt werden.

Nimmt man in Fig. 68 einmal S parallel zur Axe gerichtet an, und bestimmt die zugehörige conjugirte Gerade S', so gibt ihr Schnitt mit der Axe den zweiten Brennpunkt und ihr Schnitt mit S einen Punkt der zweiten Gauss'schen Hauptebene. Indem man dann die Austrittsgerade S' parallel der Axe gerichtet annimmt und die zugehörige Eintrittsgerade bestimmt, erhält man den ersten Brennpunkt und die erste Hauptebene. Hierdurch wird die Aufgabe constructiv gelöst: die Fundamentalpunkte des Systemes zu finden, wenn zu zwei Objecten Aa, Bb die Orte der zugehörigen Bilder $A'a'$, $B'b'$ und die Grösse je zweier homologer Dimensionen bestimmt wurden; eine Aufgabe, die auf dem Wege der Rechnung die Ermittlung der Grössen f, f', h, h' aus den vier Gleichungen des Artikels 45 erfordert.

Es könnte scheinen, dass durch Angabe der beiden Gauss'schen Hauptebenen und der beiden Brennebenen, die mit den ihnen conjugirten unendlich fernen Ebenen in der That drei Paare conjugirter Ebenen ausmachen, mehr gegeben werde, als nach Artikel 117 zur vollständigen Definition der Wirkung des Systemes nothwendig ist, und dass hierzu die beiden Hauptebenen und z. B. die erste Brennebene und die ihr conjugirte unendlich ferne Ebene im letzten Medium ausreichen würde. Es ist aber zu bemerken, dass für die beiden Ebenenpaare noch die Aehnlichkeitsverhältnisse oder, was dasselbe sagt, die zugehörigen Aehnlichkeitscentra gegeben sein müssen. Für die beiden Hauptebenen hat nun das Aehnlichkeitscentrum eine solche Lage, dass zu deren Bestimmung keine weiteren Daten mehr nöthig sind, es liegt im Unendlichen. Für die Brennebene und die unendlich ferne Ebene im letzten Medium hingegen fällt das Aehnlichkeitscentrum in den ersten Listing'schen Knotenpunkt, dessen Lage erst bestimmt ist, wenn die zweite Brennweite, also auch der zweite Brennpunkt bereits gefunden ist. Der zweite Brennpunkt dient also nach dieser Auffassung dazu, um zu einem Punkte der ersten Brennebene den conjugirten auf der unendlich fernen Ebene des letzten Mediums oder, anders ausgedrückt,

die Richtung der Geraden zu bestimmen, die durch diesen unendlich fernen Punkt gehen. Die Construction conjugirter Geraden im Artikel 37, 2 und 3, die darauf hinauskommen, zu R (Fig. 11) den conjugirten Punkt zu finden, zeigen das Gesagte sofort.

120. Wenn wir zur Construction conjugirter Geraden zwei von den in 117 genannten vier Ebenenpaaren und zur Construction von conjugirten Punkten zwei von den in 118 genannten Punktepaaren in Anwendung bringen, so ergeben sich je sechs verschiedene Arten dieser Constructionen. Nennen wir J den unendlich fernen Axenpunkt im ersten, J' den unendlich fernen Axenpunkt des letzten Mediums, so werden

$$P,\ P',\ J,\ F',$$
$$F,\ J',\ P,\ P',$$
$$P,\ P',\ \overline{P},\ \overline{P}',$$
$$\overline{P},\ \overline{P}',\ J,\ F',$$
$$F,\ J',\ \overline{P},\ \overline{P}',$$
$$F,\ J',\ J,\ F',$$

die Combinationen der Fundamentalpunkte oder vielmehr der ihnen entsprechenden Ebenen vorstellen, welche zur Ermittlung conjugirter Geraden dienen können. Die beiden ersten Combinationen führen zu den Constructionen, die im Artikel 37 gezeigt wurden. Entsprechend den übrigen vier Combinationen, werden wir die

Aufgabe: Zu einer gegebenen Einfallsgeraden die entsprechenden Austrittsgerade zu finden,

noch auf folgende Arten zu lösen im Stande sein.

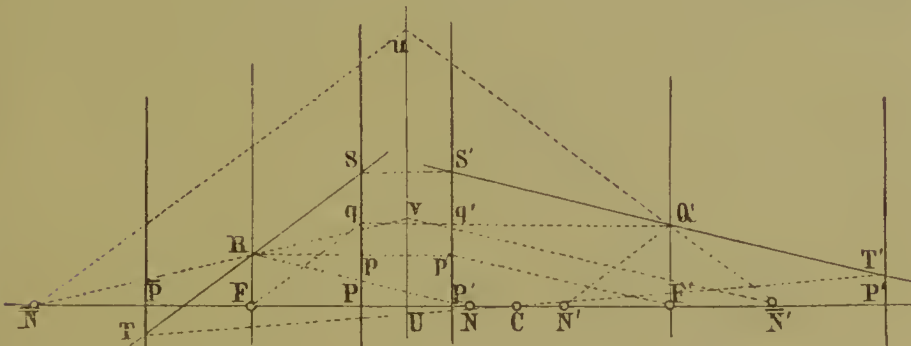
Es seien Fig. 70. $F, F', P, P', \overline{P}, \overline{P}'$ $N, N', \overline{N}, \overline{N}'$ die Brennpunkte, die beiden Arten der Haupt- und Knotenpunkte, C das Aehnlichkeitscentrum der beiden negativen Hauptebenen, Uvu der perspectivische Durchschnitt der beiden conjugirten Strahlenbündel, deren Centra in den negativen Knotenpunkten liegen, und TRS die gegebene Einfallsgerade, welche die erste negative Hauptebene, die erste Brennebene und die erste Gauss'sche Hauptebene beziehungsweise in den Punkten T, R, S, schneidet.

a) Man ziehe SS' parallel der Axe und durch C die Gerade TCT'; dann ist $S'T'$ die gesuchte Austrittsgerade.

b) Man ziehe die Gerade TCT'; macht man ferner $N'Q'$ parallel zu TR, oder zieht man $\overline{N}u$ parallel zu TR, und verbindet u mit $\overline{N}'$, oder zieht man endlich Fq parallel zu TR und aus q die zur Axe parallele Gerade qq', so werden auch $u\overline{N}'$ und qq' die zweite Brennebene in Q' schneiden, und $Q'T'$ ist die Austrittsgerade.

c) Man ziehe RN, oder man ziehe die Gerade $\overline{N}Rv$ und verbinde v mit $\overline{N}'$, oder endlich man mache Rpp' parallel der Axe und verbinde p' mit F'; zieht man durch T' eine Parallele zu einer der Geraden RN, $v\overline{N}'$ $p'F'$, die unter sich selbst parallel sind, so erhält man die gesuchte Austrittsgerade.

Fig. 70.



d) Man bestimme den Punkt Q' wie in b angegeben und ziehe durch Q' eine Parallele zu irgend einer der Geraden RN, $v\overline{N}'$, $p'F'$; diese ist die gesuchte Austrittsgerade.

Von den sechs Combinationen der Fundamentalpunkte

$$N,\ N',\ J,\ F',$$
$$F,\ J',\ N,\ N',$$
$$N,\ N'\ \overline{N},\ \overline{N}',$$
$$\overline{N},\ \overline{N}',\ J,\ F',$$
$$F,\ J',\ \overline{N},\ \overline{N}',$$
$$F,\ J',\ J,\ F',$$

die zur Lösung der

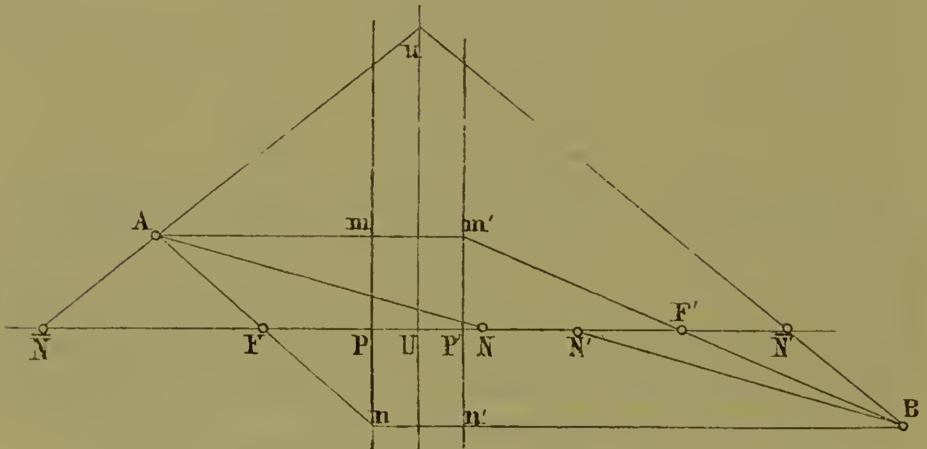
Aufgabe: Zu einem gegebenen Punkt den conjugirten zu finden,

in Betracht kommen, liegen die beiden ersten und die letzte den im Artikel 37 angegebenen Constructionen zu Grunde, zu denen in

Fig. 71 noch die übrigen hinzugefügt sind, bei denen die negativen Knotenpunkte in Verwendung kommen. Die Fundamentalpunkte und der perspectivische Durchschnitt der beiden durch die negativen Knotenpunkte gehenden conjugirten Strahlenbündel sind in dieser Figur wie in der vorhergehenden bezeichnet.

Ist A der gegebene Punkt, betrachtet als Centrum eines im ersten Medium verlaufenden Strahlenbündels, so ziehe man $\overline{N}A$ bis zum Durchschnitt u mit der Ebene Uu; auf der durch u und $\overline{N}'$ gelegten Geraden wird der zu A conjugirte Punkt B liegen müssen, und dann demnach als Schnittpunkt der aus $\overline{N}'$ parallel zu AN gezogenen Geraden, der Geraden $m'F'$ oder nn' mit $u\overline{N}'$ erhalten werden.

Fig. 71.



121. Bezeichnen wir mit ξ und ξ' die absoluten Werthe der Entfernungen eines auf der Axe gelegenen Punktes A und des ihm conjugirten Punktes B, beziehungsweise vom ersten und zweiten Brennpunkte eines gegebenen dioptrischen Systemes, setzen wir das Product der beiden Brennweiten, diese ebenfalls absolut genommen, gleich φ^2, so dass φ die mittlere geometrische Proportionale der beiden Brennweiten wird; alsdann lautet die Gleichung (V) des Artikels 38:

$$\xi\xi' = \varphi^2,$$

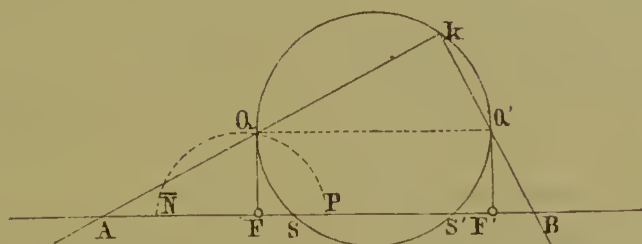
und wir wissen, dass die beiden Punkte A und B gegen die respectiven Brennpunkte F und F' entgegengesetzte Lage haben, sodass, wenn

z. B. A gegen F im Sinne der Lichtbewegung vorausliegt, umgekehrt F' vor B sich befinden muss.

In Folge der obigen Gleichung lassen sich conjugirte Axenpunkte auf sehr einfache Weise mittelst eines festen Kreises construiren, und zwar wie folgt:

Man trage von den beiden Brennpunkten F und F' aus nach derselben Seite hin und senkrecht zur Axe die beiden gleichen Strecken $FQ = FQ' = \varphi$ ab, und beschreibe über QQ' als Durchmesser einen Kreis QkQ'. Zieht man dann die Gerade AQ, welche einen Punkt A der Axe mit Q verbindet und den genannten Kreis in k trifft, so wird der Schnittpunkt der Geraden kQ' mit der Axe der gesuchte zu A conjugirte Punkt B sein.

Fig. 72.



In der That folgt aus dieser Construction (Fig. 72) wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AFQ und $Q'F'B$

$$\frac{FA}{QF} = \frac{F'Q'}{BF'}$$

also mit Rücksicht auf die eingeführte Bezeichnung

$$\frac{\xi}{\varphi} = \frac{\varphi}{\xi'}, \text{ oder } \xi\xi' = \varphi^2,$$

und die Construction zeigt, dass A und B beziehungsweise gegen F und F' immer entgegengesetzte Lage haben.

Sind P und $\overline{N}$ der erste Gauss'sche Hauptpunkt und der erste negative Knotenpunkt, und erinnert man sich, dass PF gleich ist der ersten, $\overline{N}F$ gleich ist der zweiten Brennweite, so bemerkt man,

dass Q der Schnittpunkt des über $\overline{NP}$ als Durchmesser construirten Kreises mit der in F errichteten, zur Axe senkrechten Geraden ist. Falls das erste und letzte Medium dieselben Brechungsindices haben, wird φ und somit auch FQ und $F'Q'$ gleich der Brennweite des Systemes.

Die angegebene Construction conjugirter Axenpunkte lehrt zwei weitere merkwürdige Punkte eines dioptrischen Systemes kennen, die immer dann existiren, wenn

$$\varphi = FQ = F'Q' < \frac{1}{2} FF'.$$

In diesem Falle wird nämlich der Kreis QkQ' die Axe in zwei Punkten S und S' schneiden, und sucht man nach der obigen Regel zum Punkt S seinen conjugirten, so bemerkt man sofort, dass dieser mit ersterem zusammenfällt. Gleiches gilt bezüglich des Punktes S'. Diese beiden, zuerst von Listing hervorgehobenen Punkte, haben von ihm dem Namen symptotische Punkte oder Symptosen erhalten. Durch diese Punkte gehen je zwei zusammenfallende, zur Axe senkrechte conjugirte Ebenen hindurch, aber conjugirte Bilder, die in diesen zusammenfallenden Ebenen liegen, decken sicht nicht, denn damit dieses stattfände, müssten die Abstände conjugirter Punkte dieser Bilder von der Axe gleich sein, was nur für die Gauss'schen Hauptebenen zutrifft. Die übereinanderfallenden conjugirten Bilder haben nur einen Punkt, nämlich den in der Axe gelegenen, gemeinsam.

Die Bedingung für die Existenz der Symptosen ist immer erfüllt, wenn das System unendlich dünn, oder seine Hauptebenen zusammenfallen. Alsdann wird FF' gleich der arithmetischen Summe der Brennweiten, und die Hälfte dieser Summe ist im Allgemeinen grösser als die mittlere geometrische Proportionale φ der Brennweiten, und wird dieser gleich, wenn die beiden Brennweiten ihrem absoluten Werthe nach einander gleich sind. Da der Abstand der Punkte S und S' vom Durchmesser QQ' gleich φ ist, so müssen nunmehr (Fig. 72) die Entfernungen des S sowohl wie des S' von den beiden Brennpunkten gleich den beiden Brennweiten werden. In dem betrachteten Falle liegt daher einer der symptotischen

Punkte in jenem Axenpunkte, in welchem die beiden Gauss'schen Hauptpunkte zusammenfallen, der andere in den zusammenfallenden Listing'schen Knotenpunkten. Besteht das System aus einer einzigen brechenden Fläche, so ist ihr Scheitel die eine, ihr Krümmungsmittelpunkt die andere Symptose. Sind überdies die beiden Brennweiten gleich, ist also das System eine unendlich dünne Linse, so fallen beide Symptosen im Scheitel dieser Linse zusammen.

Für ein beliebiges System wird die Bedingung für die Existenz der Symptosen immer erfüllt sein, wenn die Haupt- und Brennpunkte sich in der Ordnung F, P, P', F' aufeinanderfolgen, denn in diesem Falle ist die Entfernung FF' grösser, als im soeben betrachteten Falle eines unendlich dünnen Systemes.

Man kann ferner noch zeigen, dass für ein Linsensystem die symptotischen Punkte nicht existiren, wenn die Fundamentalpunkte die Gruppirung F, P', P, F' und P', F, F', P haben. Es ist nämlich für ein Linsensystem φ gleich der Brennweite des Systemes und, wenn wir mit $\triangle$ die absolut genommene Entfernung der Hauptpunkte bezeichnen,

$$FF' = 2\varphi \pm \triangle,$$

wobei das obere Vorzeichen gilt für die Aufeinanderfolge F, P, P', F', das untere hingegen für die Anordnungen F, P', P, F' und P', F, F', P. Die obige Bedingung wird jetzt, wenn man den Werth von FF' substituirt

$$o < \pm \triangle,$$

d. h. $\triangle$ muss dass positive Vorzeichen haben, wodurch die vorige Behauptung erwiesen ist.

Den Linsencombinationen z. B. entsprechend den Fig. 44, 45 und 46 kommen daher keine Symptosen zu, wohl aber der in Fig. 47 dargestellten Combination.

Würden endlich die Fundamentalpunkte die Aufeinanderfolge P, F, F', P' haben, so wäre

$$FF' = \triangle - 2\varphi,$$

und die Bedingung für die Existenz der Symptosen

$$\varphi < \frac{1}{4}\triangle.$$

Das zusammengesetzte Mikroskop besitzt die ebengenannte Anordnung der Fundamentalpunkte, und da bei ihm die Entfernung der Hauptebenen von einander sehr gross ist gegen die Brennweite, so werden auch in der Regel für ein zusammengesetztes Mikroskop die symptotischen Punkte existiren.

§ 2. Graphische Ermittelung des Weges eines Lichtstrahles durch ein gegebenes dioptrisches System.

122. Aus der im Artikel 4 angegebenen Construction des an einer Trennungsfläche gebrochenen Strahles kann man eine andere ableiten, die namentlich dann mit Vortheil angewendet wird, wenn ein Lichtstrahl durch ein dioptrisches System verfolgt werden soll, das aus einer beträchtlichen Anzahl von Medien besteht.

Fig. 73 a.

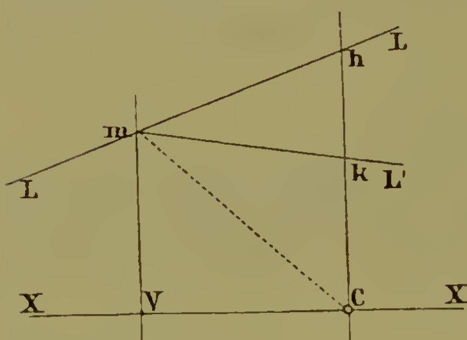
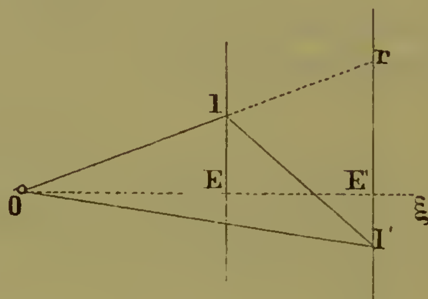


Fig. 73 b.



Es sei Fig. 73 a V der Scheitel der brechenden Fläche, C ihr Krümmungsmittelpunkt, und LL der einfallende Strahl, welcher die in C zur Axe senkrecht gezogene Gerade Ch in h schneidet. Um den gebrochenen Strahl mL' zu finden, haben wir auf dieser Senkrechten den Punkt k so zu bestimmen, dass

$$\frac{Ch}{Ck} = \frac{n'}{n}$$

wird, wobei n und n' die absoluten Brechungsindices des ersten und zweiten Mediums bedeuten, und den Einfallspunkt m mit k zu verbinden.

In Figur 73 b bestimmen wir auf einer zur Axe XX parallelen Geraden $O\xi$ zwei Punkte E und E' so, dass

$$\frac{OE}{OE'} = \frac{n}{n'}$$

wird, und errichten in diesen die Senkrechten zu $O\xi$, El und $E'l'$. Ferner ziehen wir aus O die Gerade Olr parallel zu LL und aus dem Schnittpunkt der ersteren Geraden mit der Senkrechten durch E eine Parallele zu mC, welche die Senkrechte durch E' in l' trifft. In Folge dieser Construction sind die Dreiecke hmC und rll' ähnlich und somit

$$\frac{l'r}{rl} = \frac{Ch}{hm}.$$

Es ist aber auch vermöge der Constructionen in Fig. 73 a und 73 b

$$\frac{kh}{Ch} = \frac{n' - n}{n} \text{ und } \frac{rl}{rO} = \frac{n' - n}{n}$$

woraus

$$\frac{rl}{rO} = \frac{kh}{Ch}$$

folgt und wenn man diese Gleichung mit der früheren multiplizirt

$$\frac{l'r}{rO} = \frac{kh}{hm}.$$

Da nun der Winkel lrl' gleich ist dem Winkel mhC, so sagt diese letztere Gleichung, dass das Dreieck Orl' ähnlich ist dem Dreiecke mhk und folglich, wegen des Parallelismus von Olr und mh, Ol' parallel ist zu mkL'. Die Figur 73 b bestimmt also die Richtung des gebrochenen Strahles, so dass derselbe sofort in Figur 73 a eingezeichnet werden kann, da ein Punkt, der Punkt m bekannt ist, durch welchen er gehen muss. Es ergibt sich demnach zur Construction des gebrochenen Strahles die folgende

Regel: Man verzeichne zwei zur Axe senkrechte Gerade E, E' deren Entfernungen von einem Punkte O sich verhalten wie die Brechungsindices des ersten

und zweiten Mediums; sodann führe man aus O eine Parallele zum einfallenden Strahle und aus ihrem Schnittpunkte l mit E zur Geraden mC, die den Krümmungsmittelpunkt mit dem Einfallspunkt verbindet, eine Parallele bis zum Durchschnitt l' mit E': dann ist die Verbindungsgerade Ol' parallel zum gebrochenen Strahle.

Fig. 74 a.

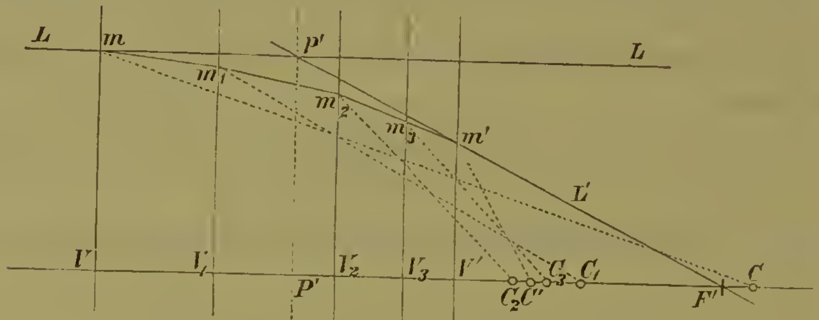
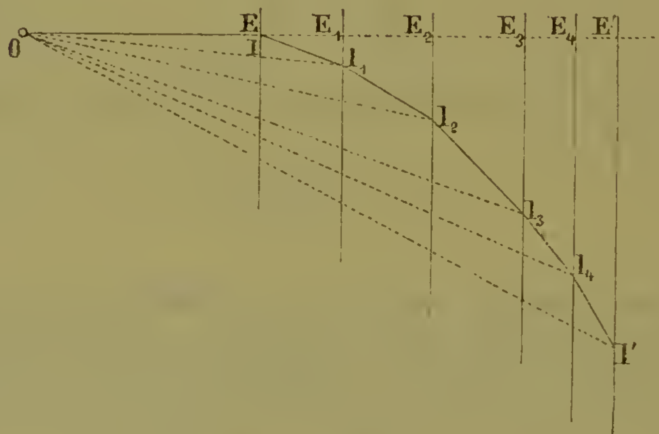


Fig. 74 b.



Die Anwendung dieser Construction auf ein System von beliebig vielen brechenden Flächen zeigen die Figuren 74 a und 74 b. Erstere enthält zunächst als Grundlage für die auszuführende Construction die geometrischen Daten des Systemes verzeichnet, nämlich die brechenden Flächen V, V_1 . . . V' und deren Krümmungsmittelpunkte C, C_1 . . . C'; letztere die physikalischen Daten d. h. die Brechungsindices der aufeinanderfolgenden Medien, denen die

Entfernungen der zur Axe senkrechten Geraden E, E_1 . . . E' vom Punkte O proportional sind.

Die Einfallsgerade LL ist parallel der Axe angenommen und das Polygon Lmm_1 . . . $m'L'$ (Fig. 74 a) repräsentirt den Weg dieses Lichtstrahles durch das System. Den Strahlen mC, m_1C_1, . . . $m'C'$ durch die Eckpunkte dieses Polygons sind die Seiten ll_1, l_1l_2 . . . l_4l' des Polygons in Fig. 74 b, und den Strahlen Ol, Ol_1, . . . Ol' durch die Eckpunkte dieses zweiten Polygons sind die Seiten Lm, mm_1 . . . $m'L'$ des ersteren parallel gezogen. Bei wirklicher Ausführung dieser Constructionen brauchen die gestrichelten Linien nicht wirklich gezeichnet zu werden.

Der Schnittpunkt des austretenden Strahles $m'L'$ mit der Axe liefert den zweiten Brennpunkt und der Schnittpunkt mit dem einfallenden Strahle LL einen Punkt p' der zweiten Hauptebene $p'P'$. Um den ersten Brenn- und Hauptpunkt zu finden, hätte man nur LL als einen aus dem letzten Medium einfallenden Strahl anzunehmen und dessen Weg durch das System bis in das erste Medium hinein zu verfolgen. Die Grundlinien der Figur 74 b, in welche das neue Polygon einzuzeichnen ist, bleiben hierbei und überhaupt für jeden Strahl, dessen Weg durch das System bestimmt werden soll, ungeändert. Dieser Umstand sowie der weitere, dass die Figuren weniger als dies bei anderen Methoden der Fall ist, durch Constructionslinien überladen erscheinen, machen die angegebene Constructionsart bequem und übersichtlich.

Sie gewährt auch in vielen Fällen, z. B. zur Bestimmung der Fundamentalpunkte des Auges verwendet, eine Bestimmung, die unter Berücksichtigung der Schichtung der Krystalllinse und der Aenderung der Krümmungen dieser Schichten je nach dem Grade der Accommodation äusserst mühsame Rechnungen erfordert, einen hinreichenden Grad der Genauigkeit, da für die Construction ein bedeutend vergrösserter Maassstab in Anwendung kommen kann.



1

